Kapitel I: Fragestellungen der Kombinatorik - einige Beispiele

Beispiel 1: $n \in \mathbb{N}$ sei beliebig vorgegeben, berechne folgende Summen:

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

$$\sum_{k=0,\ k\ gerade}^{n} k \quad , \quad \sum_{k=0,\ k\ ungerade}^{n} k \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k^m,\ m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k|n} k \quad , \quad \sum_{(k,n)=1} k \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} c^k,\ c \in \mathbb{C}$$

Beispiel 2: Weitere Summen:
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ bestimme asymptotische Entwicklung

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \approx \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ s \in (1, \infty)$ Riemann'sche Zetafunktion

$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ist irrational.

Beweis von Apéry 1978 verwendet Rekursion für die Summe $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = A_n$ der Form:

$$(n+1)^3 A_n + (n+2)^3 A_{n+2} = (2n+3)(17n^2 + 51n + 39)$$

Wie kann man systematisch derartige Rekursionen finden?

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \ldots$ Partialbruchzerlegung liefert Teleskopreihe.

Beispiel 3: Binomialentwicklung der Monome ($n \in \mathbb{N}$):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(Beachte, dass } \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k < 0 \text{ und } k > n\text{);}$$

Die Formel kann auf $n \in \mathbb{Q}$ verallgemeinert werden und liefert dann eine unendliche Summe.

Konvention: $\sum_k$ bedeutet in diesem Skriptum stets $\sum_{k \in \mathbb{Z}}$ oder $\sum_{k \in \mathbb{N}}$ (je nach Kontext).

Monome sind besonders einfache K-Basis des Polynomrings $K[x]$, K Körper. Manchmal sind andere Basen günstiger, etwa:

$$x^{\overline{k}} := x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdots (x+k-1) \qquad \text{steigende Fakultät}$$
$$x^{\underline{k}} := x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-k+1) \qquad \text{fallende Fakultät}$$

Sowohl $x^{\overline{k}}$ und $x^{\underline{k}}$ sind Polynome vom Grad k und es gilt:

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \cdot y^{\overline{n-k}},$$

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum \binom{n}{k} x^{\underline{k}} \cdot y^{\underline{n-k}};$$

gemeinsamer Beweis durch den sogenannten Umbralen Kalkül (oder mit Stirling Zahlen, siehe Kapitel III).

Beispiel 4: Kombinatorische Identitäten. Sei $n \in \mathbb{N}$. Finde "geschlossene Form" für

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_k \binom{n}{k}^2 .$$

Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6
c_n	1	2	6	20	70	252	924

Wir berechnen nun c_n.

Für $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}.$$

Damit können wir schreiben:

$$\sum_k \binom{n}{k}^2 = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ k Elemente auszuwählen. Es gibt $\binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten, aus der Menge $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ $(n-k)$-Elemente auszuwählen. Also gibt es $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ Möglichkeiten, aus $\{1, \ldots, 2n\}$ n Elemente auszuwählen, wobei k aus den ersten n Elementen der Menge $\{1, \ldots, 2n\}$ und $n-k$ Elemente aus den letzten n Elementen derselben Menge sind. Jede Auswahl einer n-elementigen Menge in $\{1, \ldots, 2n\}$ entspricht für ein gewisses k obiger Konstruktion. Also erhalten wir

$$c_n = \sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Alternativ: Beweis der Formel durch Induktion über $\mathbb{N}$, *oder:* Entwickle $(1+x)^{m+l} = (1+x)^m \cdot (1+x)^l$. Der Koeffizient von x^j ist links $\binom{m+l}{j}$ und rechts $\sum_k \binom{m}{k}\binom{l}{j-k}$. Setze nun $m = l = j = n$ und erhalte: $\binom{2n}{n} = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Berechnung von c_n mit `Maple`:

$sum(\binom{n}{k}, k = 0..n);$

$\frac{(n+1)^2\Gamma(2n+2)}{(2n+1)\Gamma(n+2)^2}$ `Aber:` $\Gamma(n+1) = n!$ `(siehe Kapitel III, Abschnitt über Gammafunktion)`

$\frac{(n+1)^2(2n+1)!}{(2n+1)(n+1)!^2} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$

Beispiel 5: *Algorithmus von Fasenmyer.*

Berechne $f(n) = \sum_k k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Betrachte dazu

$$F(n,k) = k \cdot \binom{n}{k} = \frac{k \cdot n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}.$$

$F(n,k)$ ist eine Funktion in zwei Variablen (polynomial in n vom Grad k). Idee: Finde Rekursion für die $F(n,k)$, deren Koeffizienten nur von n abhängen. Bilde dann die Summe dieser Gleichungen über k. Rekursion: Finde $I, J \subset \mathbb{N}$ endliche Indexmengen und $a_{ij}(n) \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$ für $i \in I, j \in J$ mit:

$$\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij}(n) F(n+i, k+j) = 0.$$

Summation dieser Gleichungen über $k \in \mathbb{Z}$ liefert eine Rekursion für $f(n)$ mit Koeffizienten, die von n abhängen, etwa:

$$\sum_{i \in I} b_i(n) \cdot f(n+i).$$

Löse diese Rekursion, um $f(n)$ zu finden! Hier: Wähle etwa $I = J = \{0, 1\}$ (später werden I, J algorithmisch bestimmt). Wir suchen also eine Rekursion der Form:

$$a(n) \cdot F(n,k) + b(n) \cdot F(n+1,k) + c(n) \cdot F(n,k+1) + d(n) \cdot F(n+1,k+1) = 0$$

für gewisse $a(n), b(n), c(n), d(n)$. Division durch $F(n,k) \neq 0$ sofern $n \geq 1$ liefert mit

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{k\binom{n+1}{k}}{k\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k}$$

die Gleichung

$$a(n) + b(n) \cdot \frac{n+1}{n+1-k} + c(n) \cdot \frac{n-k}{k} + d(n) \cdot \frac{n+1}{k} = 0.$$

Erweitern mit $k \cdot (n+1) - k$ und Ordnen nach Potenzen von k ergibt:

$$(c-a) \cdot k^2 + (a+b-c-d+(a+b-2c-d)n) \cdot k + \big(d + (c+2d)n + (c+d)n^2\big) = 0.$$

Nullsetzen der Koeffizienten liefert drei lineare Gleichungen in a, b, c, d (abhängig von n), nämlich:

$$\begin{aligned} c - a &= 0 \\ a + b - c - d + (a + b - 2c - d)n &= 0 \\ d + (c + 2d)n + (c + d)n^2 &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat einen eindimensionalen Lösungsraum $L_n = \langle(-1 - \frac{1}{n}, 0, -1 - \frac{1}{n}, 1)\rangle$. Also:

$$\begin{aligned} a(n) &= -(1 + \frac{1}{n}), \\ b(n) &= 0, \\ c(n) &= -(1 + \frac{1}{n}), \\ d(n) &= 1. \end{aligned}$$

Das heisst:

$$-(1 + \frac{1}{n}) \cdot F(n,k) + 0 \cdot F(n+1,k) - (1 + \frac{1}{n}) \cdot F(n,k+1) - F(n+1,k+1) = 0$$

Summation über k liefert für $n \geq 1$:

$$-(1 + \frac{1}{n}) \cdot f(n) - (1 + \frac{1}{n}) \cdot f(n) + f(n+1) = 0$$

oder

$$f(n+1) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\frac{n+1}{n} f(n).$$

n=1: $f(1) = \sum_k k\binom{1}{k} = 1$

n=2: $f(2) = 2\frac{n+1}{n} f(1) = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 = 4$

Die Rekursion für $f(n)$ lautet also:

$$f(n+1) = 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot f(n); \quad n \geq 1,$$
$$f(1) = 1.$$

Hieraus folgt sofort die explizite Formel $f(n+1) = 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot f(n) = 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot f(n-1) = 2^n \cdot (n+1)$. Also:

$$f(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Wichtig: Die Anzahl der unbestimmten Koeffizienten $a(n), b(n), \ldots$ muss grösser sein als die Anzahl der resultierenden Gleichungen um die Existenz einer nicht trivialen Lösung zu gewährleisten.

Beispiel 6: Riemann'sche Zetafunktion

$$\zeta(s) := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{R},\ s > 1 \text{ konvergent}$$

(wird auf $\mathbb{C}$ zu einer meromorphen Funktion fortgesetzt).
Wissen (Analysis):

$$\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \quad \text{harmonische Reihe divergiert}$$

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)) \text{ geht für } n \to \infty \text{ gegen } \gamma = 0,57... \quad \text{Euler-Mascheroni-Konstante}$$

$$\zeta(2) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\zeta(3) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ ist in geschlossener Form unbekannt. 1978 bewies Apéry: $\zeta(3)$ ist irrational. Apéry verwendet im Beweis oben erwähnte Rekursion für die Summe $A(n) = \sum_k \binom{n}{k}^2 \cdot \binom{n+k}{k}^2$.

Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4
$A(n)$	1	5	73	1445	33001

Setze $A(n,k) = \binom{n}{k}^2 \cdot \binom{n+k}{k}^2$. Dann gilt:

$$(n+1)^3 A(n,k) - (2n+3)(17n^2 + 51n + 39) A(n+1,k) + (n+2)^3 A(n+2,k) = B(n,k+1) - B(n,k)$$

wobei

$$B(n,k) = \frac{(2n+3)(8k^2 - 12k - 16(n+1)(n+2))(n+k)!^2}{(k-1)!^4 (n+2-k)!^2},$$

Summation über k liefert

$$(n+1)^3 A(n) + (n+2)^3 A(n+2) = (2n+3)(17n^2 + 51n + 39) A(n+1)$$

Diese Rekursion wurde von Apéry ohne Beweis als wahr angenommen. Henri Cohen + Don Zagier lieferten dann den Beweis der Gültigkeit. (Literatur: A. van der Poorten: A proof that Euler missed ..., The Math. Intelligencer **1** (1979), 195-203).

Bemerkungen: (a) Apéry's Beweis liefert neue verbesserte Approximation von π.

(b) Der Zeilberger-Algorithmus, zur Summation von hypergeometrischen Thermen, hat seinen Ursprung im Beweis von Cohen + Zagier.

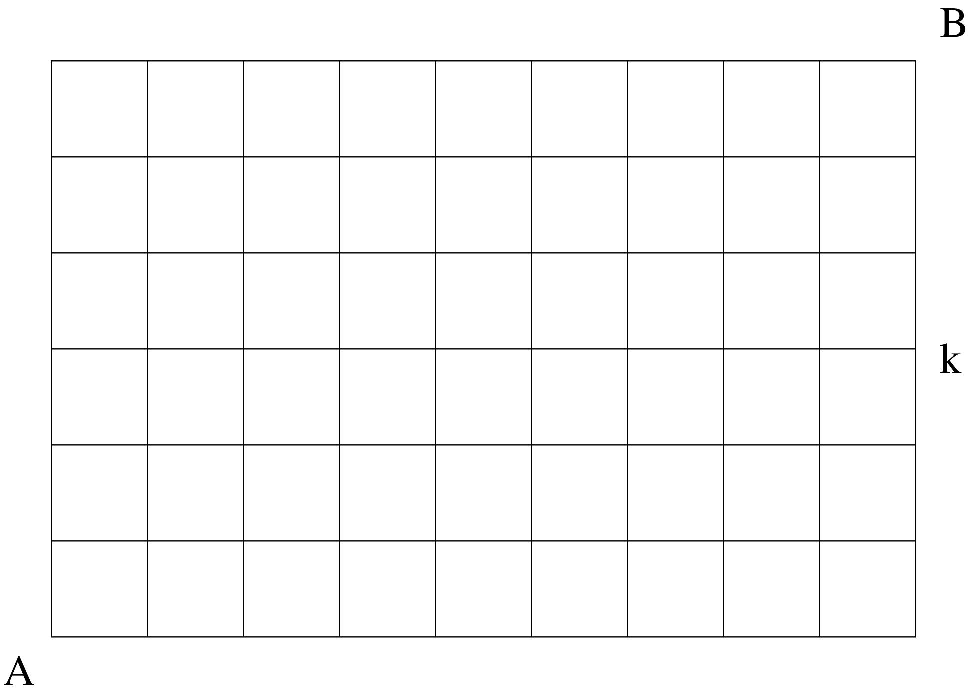
Beispiel 7: *Nach Grösse sortieren.* Betrache für $n \in \mathbb{N}$ die sogenannten Farey-Brüche:

$$F = \{\frac{p}{q}\ ;\ p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0,\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1,\ p \leq q \leq n\} \ \subseteq\ \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

Sortiere die Elemente von F der Grösse nach.

$$\begin{aligned}
n = 2:&\ 0 < \frac{1}{2} < 1 \\
n = 3:&\ 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1 \\
n = 4:&\ 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1 \\
n = 5:&\ 0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < 1
\end{aligned}$$

Beispiel 8: *Abzählen von Wegen in Graphen.* Wieviele kürzeste Wege gibt es von A nach B? (vgl. PS). Finde Rekursion für $g(n,k) = \#Wege\ (n \geq k)$.



Beispiel 9: *Türme und Damen auf Schachbrett*, evtl. mit gesperrten Feldern.
Siehe PS.

Beispiel 10: *Hypergeometrische Funktionen und Reihen* ([GKP p. 207 + 221], [A=B, p. 34]). Betrachte formale Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} f_k z^k = f(z) \in K[\![x]\!]$, also eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k \in K$ Körper. Speziell: $c \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ und $f_k = c^k$ liefert *geometrische Reihe* $\sum_{k\geq 0} c^k = \frac{1}{1-c}$ für $|c| < 1$; für $|c| > 1$ ist $\sum_{k\geq 0} c^k z^k$ formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $\frac{1}{|c|}$. Charakterisierende Eigenschaft für geometrische Reihe:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} \quad \text{ist eine von } k \text{ unabhängige Konstante}$$

$\sum_{k\geq 0} f_k z^k$ heisst *hypergeometrische Reihe (Funktion)*, oder: f_k heisst *hypergeometrischer Term*, wenn die Quotienten $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ rationale Funktionen in k sind, d.h. es existieren Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[t]$ mit

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{P(k)}{Q(k)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Beispiele: (1) $\sum_k k\binom{n}{k} z^k$.
(2) Betrachte folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$z(1-z)F''(z) + (c - z(a+b+1))F'(z) - abF(z) = 0, \quad \text{mit} a, b, c \in \mathbb{C}, -c \notin \mathbb{N},$$

$$F(0) = 1.$$

Die Gleichung ist singulär in $z = 0, z = 1$. Lösung:

$$F(z) = F(a, b, c, z) := \sum_{k\geq 0} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}} k!} \quad \text{mit}$$

$$a^{\overline{k}} := a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+k-1), \; a^{\overline{0}} := 1.$$

Aus $f_k = \frac{a^{\overline{k}} \cdot b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}} \cdot k!}$ folgt $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{a^{\overline{k+1}}}{a^{\overline{k}}} \cdot \frac{b^{\overline{k+1}}}{b^{\overline{k}}} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{c+k} \cdot \frac{1}{k+1}$.

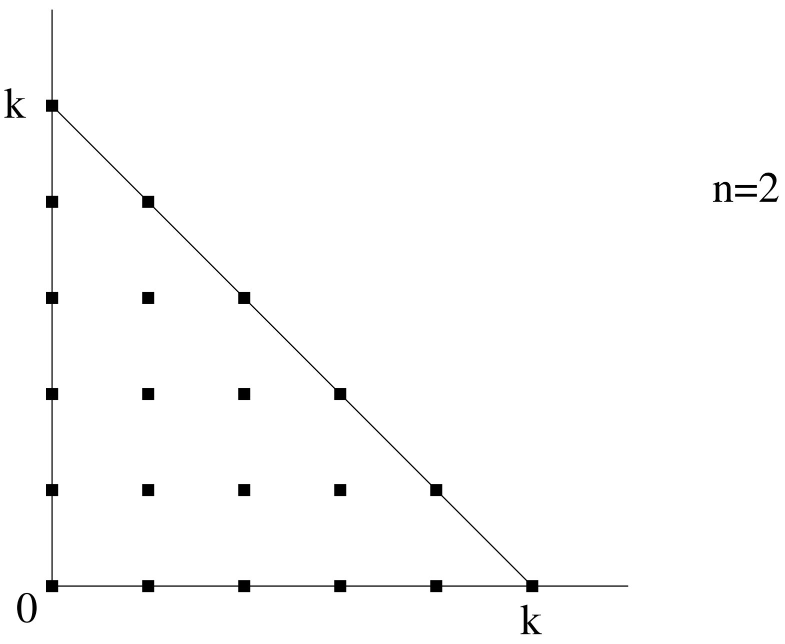
Speziell: $e^z, \frac{1}{1-z}$ und $\frac{1}{(1-z)^m}$ sind hypergeometrische Reihen der Form $F(a, b|c|z)$ ($F(a, b|c|z)$ ist die Gauss'sche hypergeometrische Reihe) mit e^z: $a = \emptyset, b = \emptyset, c = \emptyset$, $\frac{1}{1-z}$: $a = 1, b = 1, c = 1$ und $\frac{1}{(1-z)^m}$: $a = m, b = 1, c = 1$.

Achtung: Aus F, G hypergeometrisch folgt, dass auch $F \cdot G$ hypergeometrisch ist, aber $F + G$ muss nicht notwendig hyp

Beispiel 11: *Abzählen von Gitterpunkten in konvexen Polyedern.* Sei $n, k \in \mathbb{N}$ gegeben; bestimme

$$A(n, k) = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq k\},$$

wobei wir definieren: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Verwende einen der folgenden Lösungsansätze:



Unbestimmter Ansatz:

$$A(n,k) = c_n \cdot k^n + c_{n-1} \cdot k^{n-1} \cdots c_1 \cdot k + c_0$$

mit $c_i \in \mathbb{Q}$ (für eine Rechtfertigung dieses Ansatzes vgl. "diskrete" Integration). Wähle nun $(n+1)$ Werte für k, um aus den daraus entstehenden Gleichungen die Koeffizienten zu berechnen.

Rekursion: Suche eine geeignete Rekursion für $A(n,k)$. Sei dazu $B(n,k) = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| = k\}$. Dann gilt

$$A(n, k+1) = A(n,k) + B(n, k+1).$$

Weiters:

$$B(n,k) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| = k\} = \#\{\beta \in \mathbb{N}^{n-1}; |\beta| \leq k\} = A(n-1,k).$$

Also erhalten wir eine zweite Rekursion

$$B(n,k) = A(n-1,k),$$

und durch Einsetzen dann

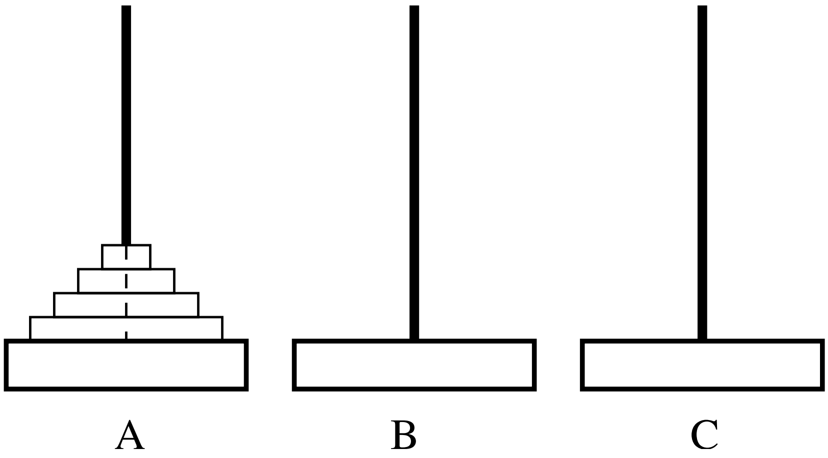
$$A(n,k) = A(n,k-1) + A(n-1,k); \quad n,k \geq 1$$

mit den Anfangsbedingungen $A(0,k) = 1$ für $k \geq 0$ und $A(n,0) = 1$ für $n \geq 1$.

Bemerkung: Ist die Rekursion gefunden, so lässt sich eine evtl. Vermutung sofort beweisen oder widerlegen, hier gilt etwa

$$A(n,k) = \binom{n+k}{k}.$$

Beispiel 12: *Die Türme von Hanoi* Gegeben sind n gelochte runde Scheiben verschiedener Grösse und drei vertikale Stäbe in folgender Anordnung:



Ziel: Lege alle Scheiben in C ab, wobei jeweils nur eine bewegt werden darf und keine Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommt.

Frage: Wieviele Züge benötigt man mindestens, um dies zu bewerkstelligen? Diese Anzahl werde mit $A(n)$ bezeichnet.

Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5
$A(n)$	1	3	7	15	31

Rekursion für $A(n)$: Lege zuerst $n-1$ Scheiben auf B ab, verschibe dann die grösste Scheibe von A nach C und lege danach die $n-1$ Scheiben von B nach C um.

Formal also:

$$A(n) = \underbrace{A(n-1)}_{(n-1)\text{ nach B}} + \overset{\text{Grösste nach C}}{\underbrace{1}} + \underbrace{A(n-1)}_{(n-1)\text{ von B nach C}} = 2 \cdot A(n-1) + 1$$

Wir erhalten also folgende Rekursion:

$$A(n) = 2 \cdot A(n-1) + 1 = 2 \cdot (A(n-1) + 1) - 1; \quad A(1) = 1$$

Mit $B(n) := A(n) + 1$ folgt somit:

$$B(n) = 2 \cdot B(n-1); \quad B(1) = 2.$$

Die expliziten Formeln sind dann: $B(n) = 2^n$ und $A(n) = 2^n - 1$.

Beispiel 13: *Partitionen* Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ mit $\lambda_i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Dann heisst $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ Partition (der Länge k) von n. Die λ_i heissen Teiler bzw. Summanden der Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \{\text{endliche Folgen}\}$.

$$p(n) = \#\text{ der Partitionen von } n,$$
$$p(n,k) = \#\text{ der Partitionen von } n \text{ der Länge } k.$$

Die Anzahl der möglichen Partitionen zu gegebenem n wächst sehr rasch:

n	1	2	3	4	5	6	10	20	50
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	42	627	204226
	(1)	(2)	(3)	(4)					
		(1^2)	(1 2)	(1 3)					
			(1^3)	$(1^2\ 2)$					
				(2^2)					
				(1^4)					

n	100	200
$p(n)$	190569292	3972999029388

Satz A: (Rodgers-Ramanujan) *Es gilt die folgende Beziehung:*

$$\#\{\lambda \textit{ Partition von } n \textit{ mit } \lambda_{i+1} \geq \lambda_i + 2\} = \#\{\lambda \textit{ Partition von } n \textit{ mit } \lambda_i \equiv \pm 1 \textit{ mod } 5\}$$

Für weitere Information siehe [Andrews, p. 109].

Satz B: (Hardy-Ramanujan, 1918) $p(n)$ *ist die nächste ganze Zahl von:*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha\sqrt{n} \rfloor} \sqrt{k} \cdot A_k(n) \cdot \psi_k(n),$$

wobei $\alpha > 0$ eine vorgegebene Konstante ist, $n \geq n_0 = n_0(\alpha)$ ist, p über die Primzahlen $< k$ läuft und

$$A_k(n) = \sum_{p<k} \omega_{k,p} \cdot e^{-\frac{2n\pi i}{k}} \quad \textit{ist}$$

Dabei ist $\omega_{k,p}$ eine genauer spezifizierte 24. Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und

$$\psi_k(n) = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{\pi}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x - \frac{1}{24}}}\right)\Big|_{x=n}$$

Bei $n = 100$ genügt $\lfloor \alpha\sqrt{n} \rfloor = 4$; bei $n = 200$ genügt $\lfloor \alpha\sqrt{n} \rfloor = 5$.

Satz B': (Rademacher, 1937) *Es gilt:*

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \cdot \sqrt{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh(\frac{\pi}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x - \frac{1}{24}})}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right).$$

Bemerkung: Satz B liefert für $n = 200$ und 8 Summanden eine Summe, die von $p(n)$ um $0,004$ abweicht! Für weitere Details zu diesem Satz siehe [Andrews, p. 69].

Satz C: (Ramanujan, 1913) *Es gilt:*

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi}}{1 + \ldots}}}} = e^{\frac{2\pi}{5}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right).$$

Diese Gleichung hat Rogers bereits 1894 gekannt (Proc. London Mathematical Society **25** (1994), p. 318 – 343). Für weitere Details siehe [Andrews, p. 103] und [Comtet, p. 107].

Bemerkung: (a) Satz C folgt aus Satz A. (b) Satz A wird heute automatisch am Computer bewiesen (erstmals von Peter Paule unter Verwendung des Zeilberger Algorithmus; siehe dazu Electronic Journal of Combinatorics Bd. **1**, 1994). Umformulierungen des Satzes C sind die folgenden Gleichungen:

$$1 + \sum_{k \geq 1} t^{k^2} \left[(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)\right]^{-1} = \prod_{k \geq 1} (1 - t^{5k-1})^{-1} \cdot (1 - t^{5k-4})^{-1},$$
$$1 + \sum_{k \geq 1} t^{k(k+1)} \left[(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)\right]^{-1} = \prod_{k \geq 1} (1 - t^{5k-2})^{-1} \cdot (1 - t^{5k-3})^{-1}.$$

Beispiel 14: *Umbraler Kalkül* (siehe [Roman, Comtet]) Wir betrachten Polynomfolgen $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, mit $p_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ Polynom vom Grad n. Dann bildet $\{p_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[x]$. Beispiele solcher Polynome:

Monome vom Grad n:

$$x^n = x \cdots x.$$

Fallende Fakultäten:

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1).$$

Steigenden Fakultäten:

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1).$$

Abel Polynome:

$$x \cdot (x-n)^{n-1}.$$

Hermite Polynome:

$$\sum_{k \geq 0} (-\frac{1}{2})^k \cdot \frac{n^{\underline{2k}}}{k!} \cdot x^{n-k}.$$

Bernoulli Polynome (mit B_k Bernoulli-Zahlen, d.h. den Koeffizienten der Reihe $\frac{t}{e^t-1} = \sum B_k \cdot \frac{t^k}{k!}$):

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} B_k \cdot x^{n-k}.$$

Laguerre Polynome:

$$\sum_{k\geq 1} \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} (-x)^k.$$

Bessel Polynome:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

Euler Polynome:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{-1}{j} \frac{j!}{k!} \frac{1}{2^j} S(k,j) x^{n-k},$$

mit $S(k,j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} i^k$, den sogenannten Stirling Zahlen 2. Art.

Betrachte dazu jeweils die EEF (exponentielle erzeugende Funktion):

$$E(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \frac{t^k}{k!} \in \mathbb{Q}[\![x,t]\!].$$

Dann gilt: Es gibt ein $g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ mit $g(0) \neq 0$ und ein $f \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$ (d.h. f ist kompositionell invertierbar, also gibt es ein $h \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ mit $(f \circ h)(t) = t$, $(h \circ f)(t) = t$; vgl. Satz über inverse Funktionen) mit

$$E(x,t) = \frac{1}{g\left(h(t)\right)} e^{xh(t)}.$$

Speziell:

$p_n(x)$	$E(x,t)$
x^k	e^{xt}
$x^{\underline{k}}$	$(1+t)^x$
Abel	$e^{xh(t)}$ mit $h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} t^k$
Hermite	$e^{xt-t^2/2}$
Bernoulli	$t/(e^t-1)e^{xt}$
Laguerre	$(1-t)^{-2} e^{xt/(t-1)}$
Euler	$2e^{xt}/(e^t+1)$
Bessel	$e^{x\left(1-(1-2t)^{\frac{1}{2}}\right)}$

Satz: *Alle diese Polynom-Folgen erfüllen die Identität:*

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_n(x) p_{n-k}(y).$$

Kapitel II: Datenstrukturen und elementare Techniken

Notation:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ natürliche Zahlen,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ganze Zahlen,
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd $, q \neq 0\}$ rationale Zahlen,
$\mathbb{N}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ n-Tupel natürlicher Zahlen,
$\mathbb{Z}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ n-Tupel ganzer Zahlen, Basis $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i.teStelle}, 0, \ldots, 0)$,

$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$, $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$,

$<_{lex}$: lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ $(e_1 > e_2 > \ldots > e_n)$,
$<_{lix}$: invers lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ $(e_1 < e_2 < \ldots e_n)$,
$<_{kp}$: komponentenweise Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$ (partielle Ordnung, keine Totalordnung),
$<_\lambda$: die durch eine Linearform $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Ordnung: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \lambda(\alpha) < \lambda(\beta)$.

K Körper oder Ring, $K^{\mathbb{N}} = \{a : \mathbb{N} \to K\} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in K$\}$ K-Vektorraum,
$K^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}},$ fast alle $a_n = 0\}$ endliche Folgen,
$K^{\mathbb{N}^n}, K^{\mathbb{Z}^n}$: multiinduzierte Folgen $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n / \mathbb{Z}^n}$,

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}/\mathbb{Z}}$, $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k := a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_1}$ für $n_0 \geq n_1$; $\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k := 0$ für $n_0 > n_1$.
Sind $a_{n_0}, \ldots, a_{n_1}$ gegeben, so bezeichnet $\sum_k a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} a_k$, oder besser:
Setze $a_k := 0$ für $k \notin [n_0, \ldots, n_1]$ und damit ist $\sum_k a_k$ definiert.
Oft $J \subset \mathbb{N}/\mathbb{Z}$ endlich: $\sum_{k \in J} a_k$.

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge, dann bezeichnet $\sum_k a_k$ die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$
(muss nicht konvergieren, zudem ist die Konvergenz im allgemeinen abhängig von der Anordnung).

Beispiele:
(1) $\sum_k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, n \in \mathbb{N}$.
(2) $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1}$; $\sum_{p \in \mathbb{N},\ \text{p prim}} p^2$; $\sum_{(k,d)=1} k(k+1)$, $d \in \mathbb{N}$.
(3) $\sum \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$ In diesem Beispiel weiss man nicht, über welche Variablen summiert wird.
Also: Laufende Indizes müssen spezifiziert werden!

Bemerkung: (a) Indizes können umbenannt werden:
$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k =$ "$sum(a_k, k = 1, ..n)$" (Maple ©) $= \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$.
Günstig ist: Startwert $k = 0$.
(b) Sind fast alle $a_k = 0$, so müssen keine Summationsgrenzen angegeben werden: $\sum_k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ da $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.
(c) Aus $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ folgt klarerweise $S_n = S_{n-1} + a_n$ für $n \geq 1$.

Etwa: Aus $a_k = 3 + 2k$ folgt $S_n = \sum_{k=0}^n (3 + 2k)$, $S_n = S_{n-1} + 3 + 2n$, $S_0 := 3 =: \alpha$

$$S_n = a(n)\alpha + b(n)\beta + c(n)\gamma$$

mit: $S_0 = \alpha = 3, S_1 = \alpha + 3 + 2 \cdot 1, S_2 = S_1 + 3 + 2 \cdot 2 = \alpha + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2, S_3 = S_2 + 3 + 2 \cdot 3 = \alpha + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2$

$$S_n = a(n) \cdot 3 + b(n) \cdot 3 + c(n) \cdot 2 = (n+1) \cdot 3 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2.$$

(d) Aus $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ folgt $S_n - S_{n-1} = a_n$; es geht also darum, die Summanden der Reihe als Differenz einer gesuchten Funktion S_n darzustellen. (vgl. Gosper-Algorithmus).

Definition *(Rekursion): Eine Rekursion für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Gleichungssystem*

$a_0 = c \ \in K$ Anfangsbedingung, $c \in K$ vorgegeben,

$a_n = f_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ Rekursionsgleichung,

wobei $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ Funktion in n Variablen. Eine *Rekursion der Ordnung* d ($d \in \mathbb{N}$) ist von der Gestalt:

$a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$ vorgegeben (Anfangsbedingung) und $a_n = f_n(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-d})$ für $n \geq d$

mit $f_n(x_1, \ldots, x_d)$ gegebene Funktion.

Speziell: $f_n = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig von n. Noch spezieller: lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten: $f_n(x_1, \ldots, x_d) = \ell(x_1, \ldots, x_d)$ *linear* (Differenzengleichung).

Beispiele: (1) $a_0 = 0, a_n = a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$ Dann gilt: $a_n = n = \sum_1^n 1$ für alle n.

(2) $a_0 = 1, a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1$ (linear mit variablen Keoffizienten) Also: $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ für alle n.

(3) $a_0 = 0, a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 1$ Dann folgt: $a_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(4) $a_0 = c, a_n = \alpha \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1$ Es gilt: $a_n = c \cdot \alpha^n$.

(5) Quicksort (Datensortierung im Computer, Hoare "Quicksort", The Computer Journal **5** (1962) 10-15) [GKP 28]

Betrachte die Rekursion

$$c_0 = 0,$$
$$c_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k, \quad k \geq 1.$$

Es gilt: $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = \frac{26}{3}$.

Finde "geschlossene Form" für c_n (hier noch ohne systematisches Verfahren).

$c_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \qquad | \cdot n$

$n \cdot c_n = n(n+1) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_k$ ersetze n durch $n-1$

$(n-1)c_{n-1} = (n-1) \cdot n + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} c_k$ Subtraktion der letzten beiden Gleichungen

$n \cdot c_n - (n-1) \cdot c_{n-1} = 2n + 2 \cdot c_{n-1}$ Vereinfachen liefert:

$$n \cdot c_n = 2n + (n+1)c_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

allgemeiner: [GKP, p. 27]

$\alpha_n \cdot c_n - \beta_n \cdot c_{n-1} - \gamma_n = 0, \quad \alpha_n \neq 0 \ (n \geq 1)$.

Sei σ_n Folge mit $\sigma_n \beta_n = -\sigma_{n-1}\alpha_{n-1}$ (Konstruktion von σ_n siehe unten).

Setze $d_n = \sigma_n \alpha_n c_n$ und erhalte nach Multiplikation der Gleichung mit σ_n:

$\sigma_n \alpha_n c_n - \sigma_n \beta_n c_{n-1} - \sigma_n \gamma_n = 0$ oder $d_n - d_{n-1} - \sigma_n \gamma_n = 0$, also $d_n = d_{n-1} + \sigma_n \gamma_n$.

Daraus $d_n = d_0 - \sum_{k=1}^{1} \sigma_k \gamma_k$, also $c_n = \frac{\sigma_1 \beta_1}{\sigma_n \alpha_n} + \frac{1}{\sigma_n \alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \gamma_k$.

Auffinden des richtigen σ_n: $\sigma_n \beta_n = \sigma_{n-1} \alpha_{n-1}$, also $\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_n}$

oder $\sigma_n = \sigma_{n-1} \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1}{\beta_n\beta_{n-1}\cdots\beta_2}$.

Hier im Beispiel:

$\alpha_n = n, \quad \beta_n = n+1, \quad \gamma_n = 2n, \quad \sigma_n = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n+1)n\cdots 3} = \frac{2}{n(n+1)}$. Damit:

$c_n = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 2(n+1)(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 = 2(n+1)H_{n+1} - 2(n+1)$ wobei $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ heissen die harmonischen Zahlen. Es gilt die Rekursion $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$.

PS: Zeige, dass $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$ für $n > 1$ durch Integration von $f(x) = \frac{1}{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = \frac{n}{n+1}$. Genauer: $H_n = \ln(n) + \gamma + o(\frac{1}{n})$ mit $\gamma = 0.5772156649...$ Euler-Konstante [GKP, p.278], genauere Entwicklung: $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + o(\frac{1}{n^2})$ [GKP, p.452].

Rechenregeln für Summen [GKP, p.30]:

Sei im folgenden $K \subset \mathbb{N}$ endliche Indexmenge, a_k, c in einem Ring bzw. Körper und $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ Permutation. Alle auftretenden Indices sind in $\mathbb{N}$. Dann gilt:

1. *Distributiv:* $\sum_{k\in K} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k\in K} a_k$,
2. *Assoziativ:* $\sum_{k\in K} (a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k$,
3. *Kommutativ:* $\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_{\sigma(k)}$,
4. *Indexshift:* $\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K-l} a_{k+l}$ für $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel: $s = \sum_{k=0}^{n} (a + bk) \overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} (a + b(n-k))$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Addition von links und rechts liefert:

$$\begin{aligned} 2s &= \sum_{k=0}^{n} (a + bk) + \sum_{k=0}^{n} (a + b(n-k)) \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} 2a + bn \overset{(1)}{=} (2a + bn) \sum_{k=0}^{n} 1 = (2a + bn)(n+1) \end{aligned}.$$

Somit:

$$s = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}.$$

5. $\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k$,
6. *Störungsmethode:* $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gesucht. Dann: $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = s_n + a_n$,

und weiters: $a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k+1}$. Versuche jetzt $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ durch s_n auszudrücken und damit eine Gleichung für s_n zu erhalten.

Beispiel: $s_n = \sum_{k=0}^{n} c \cdot x^k$, $s_{n+1} = s_n + cx^{n+1} = cx^0 + x \cdot \sum_{k=1}^{n+1} cx^k = cx^0 + x \cdot \sum_{k=0}^{n} cx^{k+1} = cx^0 + x \cdot \sum_{k=0}^{n} cx^k = x^0 + xs_n$. Es folgt: $(1-x)s_n = cx^0 - cx^{n+1}$ und damit, falls $x \neq 1$:

$$s_n = \frac{c(1 - x^{n+1})}{1 - x}.$$

Wenn $x = 1$, dann ist $S_n = c(n+1)$.

PS: $s_n = \sum_{0\le k\le n} k2^k = \ldots = (n-1)2^{n+1} + 2$ [GKP, p.33], oder $s_n = \sum_{0\le k\le n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ für $x \neq 1$.

7. *Vertauschen der Summationsreihenfolge* [GKP, p.34]: $I, J \subset \mathbb{N}$, I, J endlich und a_{ij} in gegebenem Körper:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Beispiel: (a) a_i, b_j gegeben, $I = J = \{1, \ldots, n\}$. $\sum_{1\le i,j\le n} a_i b_j = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} a_i b_j = \sum_i (a_i \cdot \sum_j b_j) = (\sum_i a_i)\cdot\left(\sum_j b_j\right)$. Speziell: $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i,j} x_i x_j = \sum_{i<j} 2x_i x_j + \sum_i x_i^2$.

(b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$.

PS: Berechne $S = \sum_{1\le j<k\le n}(a_j - a_i)\cdot(b_j - a_i) = \ldots = (\sum_{i=1}^n a_n)\cdot(\sum_{i=1}^n b_i)$ [GKP, p.37].

PS: Berechne $s_n = \sum_{1\le j<k\le n} \frac{1}{k-j} =$ (a) $\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le j<k} \frac{1}{k-j}$ oder (b) $\sum_{1\le j\le n}\sum_{j<k\le n} \frac{1}{k-j}$, oder (c) $\sum_{1\le j<k+j\le n} \frac{1}{k}$. Die dritte Variante liefert [GKP, p.40]:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{1\le j<k\le n} \frac{1}{k-j} = \sum_{1\le j<k+j\le n} \frac{1}{k} \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{1\le k\le n}\ \sum_{1\le j\le n-k} \frac{1}{k} = \sum_{1\le k\le n} \frac{n-k}{k} \\
&= \sum_{1\le k\le n} \frac{n}{k} - \sum_{1\le k\le n} 1 = n\cdot \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k} - n \\
&= n\cdot H_n - n
\end{aligned}.$$

Berechnung nach (a) liefert:

$$s_n = \sum_{0\le k<n} H_k,$$

also zudem:

$$\sum_{0\le k<n} H_k = n\cdot H_n - n.$$

Methoden der Summenberechnung [GKP 41]:

(a) Formelsammlungen:

- CRC Standard Mathematical Table, CRC Press 1991 (W.H. Beyer, Hrsg.).
- Handbook of mathematical functions. 1964 (Abramowitz, Stegun).
- Handbook of integer sequences. Springer 1994 (Sloane).
- Computerprogramme: Axiom, MACSYMA, Magma, Maple, Mathematika,

(b) Antwort erraten, probieren und anschliessend Induktion: $\sum_{k=1}^n k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$.

PS: Bestimme a, b, c, d durch Einsetzen für $n = 1, 2, 3, 4$ und beweise dann die erhaltene Formel für alle n durch Induktion.

(c) Störungsmethode: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = 1 + \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = 1 + \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 2k + n$. Also insgesamt: $\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = 1 + \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 2k + n$. Die $\sum_{k=1}^n k^2$ kürzt sich weg, man erhält also:

$$2\sum_{k=1}^n k = (n+1)^2 - (n+1).$$

Idee: Vielleicht liefert die Anwendung der Störungsmethode auf $\sum k^3$ eine Formel für $\sum k^2$. Also: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = 1 + \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} + n$. Damit:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(n+\frac{1}{2}).$$

(d) Integration: $\sum_{k=1}^{n} d^2 = s_n$ und weiter $\int_0^n x^2 \leq \int_0^n (x+1)^2$, also $s_n \sim$ kubisch.

Grösstes Ganzes, floor, ceiling [GKP, p.67]:

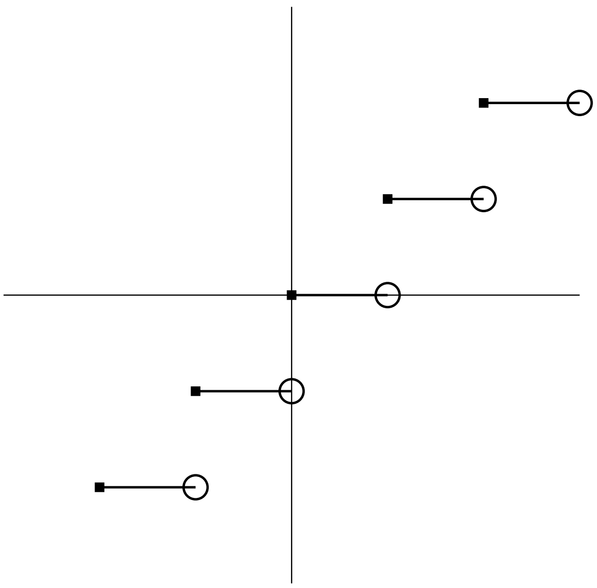
Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$, dann:

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n,$$
$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}, n-1 < x \leq n.$$

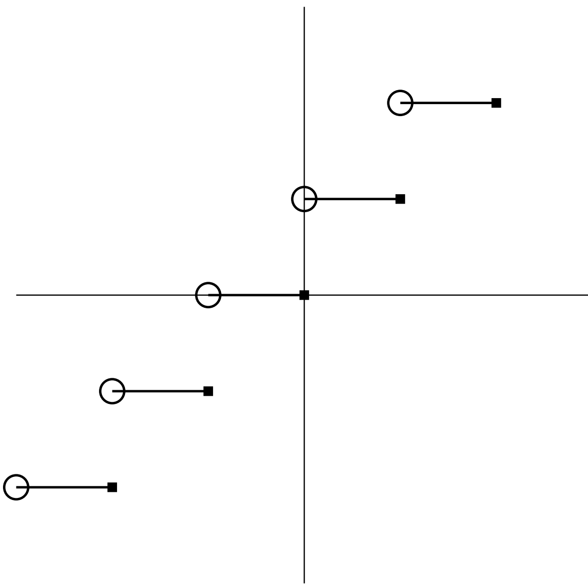
Die obige Notation stammt von K. Iverson 1962. Früher: $\lfloor x \rfloor = [x]$ und $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$,
$\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$,
$\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -\pi \rceil = -3$.

PS: $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.



floor(x)



ceil(x)

Bemerkung: Es gilt:
$\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 < n \leq x,$
$\lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad n-1 < x \leq n \quad \Leftrightarrow \quad x \leq n < x+1,$
$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$

$\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n,$

$x < n \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor < n, \quad x \le n \quad \Leftrightarrow \quad \lceil x \rceil \le n,$
$n < x \quad \Leftrightarrow \quad n < \lceil x \rceil, \quad n \le x \quad \Leftrightarrow \quad n \le \lfloor x \rfloor.$

Beispiele: (a) $\lceil \log_2 49 \rceil = ?$
Wegen $2^5 < 49 < 2^6 \quad \Rightarrow \quad 5 < \log_2 49 < 6 \quad \Rightarrow \quad \lceil \log_2 49 \rceil = 6.$
(b) Ist $n \in \mathbb{N}$, so hat n in Binärschreibweise genau $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ viele Stellen (vgl. PS).
(c) $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lceil x \rceil$.
(d) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \quad (x > 0)$. Denn:
$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = m \;\Leftrightarrow\; m \le \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m + 1 \;\Leftrightarrow\; m^2 \le \lfloor x \rfloor < (m+1)^2 \;\Leftrightarrow\; m^2 \le x < (m+1)^2 \;\Leftrightarrow\; m \le \sqrt{x} < m + 1 \;\Leftrightarrow\; m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

PS: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig monoton wachsend mit $f^{-1}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, dann gilt:
$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ und $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

(e) $\lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \rfloor$ und $\lceil \frac{x+m}{n} \rceil = \lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \rceil$.
(f) $a, b \in \mathbb{R}$. Berechne $\# \, \mathbb{Z} \cap [a, b]$ für $a \le b$ [GKP, p.74]:
$\# \, \mathbb{Z} \cap [a, b] = \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1,$
$\# \, \mathbb{Z} \cap (a, b) = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1 \quad (a < b),$
$\# \, \mathbb{Z} \cap [a, b) = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil,$
$\# \, \mathbb{Z} \cap (a, b] = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor.$

Beweis: $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \# \, \mathbb{Z} \cap [a, b) = \#\{a, a+1, \ldots, b-1\} = b - a.$
$a, b \in \mathbb{R}, a \le b \Rightarrow \# \, \mathbb{Z} \cap [a, b) = \#\{n \in \mathbb{Z}, a \le n < b\} = \#\{n \in \mathbb{Z}, \lceil a \rceil \le n < \lceil b \rceil\} = \lceil b \rceil - \lceil a \rceil.$

(g) Sei $N \in \mathbb{N}$, so bestimme die Anzahl A der $1 \le n \le N$ für die $\lfloor \sqrt[3]{4} \rfloor$ ein Teiler von n ist [GKP, p. 74-76].
Antwort: Setze $K = \sqrt[3]{N}$ und erhalte $A = \lfloor \frac{N}{K} \rfloor + \frac{1}{2}K^2 + \frac{5}{2}K - 3$.

Bemerkung: Rekursionen mit $\lfloor \; \rfloor$ und $\lceil \; \rceil$: siehe [GKP, p. 78-81], Summen mit $\lfloor \; \rfloor$ und $\lceil \; \rceil$: siehe [GKP, p. 86-94].

Fakultäten [GKP, p.111]:

$A_n = \{1, \ldots, n\}, S_n = \mathrm{Aut}(A_n) = \{\sigma : A_n \to A_n \;\; \text{bijektiv}\}$ = Permutationen von n Elementen
$F_n := \# \, S_n$ erfüllt die Rekursion

$$F_1 = 1, \;\; F_n = n \cdot F_{n-1} \quad (n \ge 1).$$

Damit folgt durch Induktion $F_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n =: n!$. Die Fakultät wächst schneller als jede Potenz c^n, $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Beispiel: Auf wieviele Arten kann man n Türme auf einem $n \times n$ Schachbrett aufstellen, ohne dass sich 2 schlagen können. Jede Aufstellung entspricht einer Permutationsmatrix, also gibt es $n!$ Möglichkeiten.

Abschätzungen: $n!^2 = \prod_{k=1}^n k^2 = (\prod_{k=1}^n k) \cdot (\prod_{k=1}^n k) = (\prod_{k=1}^n k) \cdot (\prod_{k=1}^n n + 1 - k) = (\prod_{k=1}^n k \cdot (n + 1 - k)).$
Es gilt:

$$n \le k(n + 1 - k) \le \frac{1}{4}(n+1)^2 \quad \text{für} \;\; 1 \le k \le n.$$

Bemerkung: $k(n + 1 - k) = \frac{1}{4}(n+1)^2 - (k - \frac{1}{2}(n+1))^2 \;\ge\; n$ (Minimum für $k = 1$).
Damit: $\prod_{k=1}^n n \le n!^2 \le \prod_{k=1}^n \frac{(n+1)^2}{n}$, oder: $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le \frac{(n+1)^n}{2^n}$.

unten: $n!$ asymptotisch gleich $\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n$. Bsp.: $10! = 720\cdot 8\cdot 7\cdot 9\cdot 10 \simeq \sqrt{20\pi}(\frac{10}{e)}^{10} \approx 3598696$.

Gammafunktion [Freitag-Busam, p.111], [Remmert, Funktionentheorie II]:

Für viele Anwendungen möchte man $n!$ für reelle (oder sogar komplexe) x definieren können. Dies bewerkstelligt die *Gammafunktion* $\Gamma(x)$ (nach Euler 1729 und Legendre 1811). Es soll die Funktionalgleichung

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$$

gelten (vgl. $\Gamma(n+1) = n!$). Damit ist Γ nicht eindeutig, auch wenn differenzierbar oder holomorph verlangt wird. Wir konstruieren zuerst die Gammafunktion über Integrale und charakterisieren sie später über die Funktionalgleichung. Wir rechnen immer komplex, also $\Gamma(z), z\in\mathbb{C}$.

Definition: $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ mit $z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)>0$ und $t^{z-1} := e^{\log(t)(z-1)}$ für $t\in(0,\infty)$ heisst die *(komplexe) Gammafunktion*. Genauer:

$$\Gamma(z) = \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \lim_{s\to\infty}\int_1^s t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Also ist $\Gamma(z)$ ein uneigentliches Integral.

Satz: *Die Gammafunktion ist für $z\in\mathbb{C}, Re(z)>0$ wohldefiniert (d.h. die beiden Limites konvergieren (absolut)) und definiert auf der Halbebene $Re(z)>0$ eine holomorphe Funktion, mit Ableitungen*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty t^{z-1}(log(t))^k e^{-t}dt.$$

Beweis: (vgl. [Freitag-Busam, p.192] ,[Remmert, Funktionentheorie II]) Schreibe $x = Re(z)\in\mathbb{R}$ und verwende $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t}$ für $t>0$. Zu $a>0$ existiert ein $c>0$ mit $t^{x-1}\le c\cdot e^{\frac{t}{2}}$ für $0<x\le a$ und $t\ge 1$. Also $\int_1^\infty |t^{z-1}e^{-t}|dt = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \le c\cdot\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt < \infty$. Somit konvergiert $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ absolut. Weiters gilt $|t^{z-1}e^{-t}| < t^{x-1}$ für $t>0$ und $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} = \int_0^1 t^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} - 0 < \infty$ für $\alpha<1$. Damit konvergiert $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ absolut.
Die Funktionenfolge $f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1}e^{-t}dt$ konvergiert mit obigen Abschätzungen lokal gleichmässig gegen Γ. Alle $f_n(z)$ sind holomorph, also auch $\Gamma(z)$. Zur Berechnung der Ableitungen von $\Gamma(z)$ verwende $\Gamma^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)$. Das Integral von $f_n(z)$ ist eigentlich, man kann Ableitung mit Integration vertauschen und die Formel folgt durch Rechnung und Induktion:

$$f_n^{'}(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n (t^{z-1})^{'} e^{-t}dt = \int_{\frac{1}{n}}^n (e^{(z-1)\cdot log(t)})^{'} e^{-t}dt = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{(z-1)\cdot log(t)}\cdot log(t)\cdot e^{-t}dt.$$

Satz: *Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)$ für $Re(z)>0$.*

Beweis: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$. Partielle Integration mit $u' = t^{z-1}, u = \frac{t^z}{z}, v = e^{-t}, v' = -e^{-t}$ liefert $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = uv|_0^\infty - \int_0^\infty uv'dt = \frac{t^z}{z}\cdot e^{-z}|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^z}{z}(-e^{-t})dt = 0 + z\cdot\Gamma(z+1)$.

Folgerung: *Für $n\in\mathbb{N}$ gilt:* $\Gamma(n+1) = n!$.

Bemerkung: Die Funktionalgleichung $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ für $Re(z)>0$ hat eine rechte Seite, die für $\mathrm{Re}(z)>-1$ definiert ist. Damit kann man für $0\ge Re(z) > -1, z\ne 0$ definieren

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

und erhält so eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > -1, z \neq 0\}$. Wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung gilt wieder die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad Re(z) > -1, z \neq 0.$$

Iteration liefert eine holomorphe Funktion $\Gamma(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} = \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Satz: *Die Gammafunktion ist auf $C \setminus -\mathbb{N}$ wohldefiniert, holomorph und genügt der Funktionalgleichung*

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad z \notin -\mathbb{N}.$$

Die Singularitäten in $z \in -\mathbb{N}$ sind Pole erster Ordnung mit den Residuen $Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.
Also ist $\Gamma(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $-\mathbb{N}$.

Beweis: Es fehlt nur die Aussage über die Residuen. Aber nach Definition

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n}(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

nach iterierter Funktionalgleichung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Bemerkung: Ist $x = Re(z)$, so gilt: $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(z)$ für $x > 0$. Bleibt $x = Re(z)$ also in einem Kompaktum K in $\mathbb{R}$, etwa $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so ist $\Gamma(z)$ für $Re(z) \in K$ beschränkt (und dann auch auf $[a, b)$). Umgekehrt:

Satz (Wielandt 1939): *$U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $S = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) \in [1, 2)\} \subseteq U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_S$ beschränkt, $f(1) = 1$ und $f(z+1) = z \cdot f(z)$ für $z, z+1 \in U$. Dann ist $f(z) = \Gamma(z)$.*

Beweis: ([Freitag-Busam, p. 194]) Analog wie für Γ zeigt man, dass f zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann, mit einfachen oder hebbaren Polen in $-\mathbb{N}$ und mit Funktionalgleichung $f(z+1) = z \cdot f(z)$ auf ganz $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. Die Residuen sind wieder $\mathrm{Res}(f, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.
Betrachte nun $g(z) = f(z) - \Gamma(z)$ mit hebbaren Singularitäten in $-\mathbb{N}$, also $g(z)$ ganze Funktion. Weiters ist $g(z)$ in jedem Streifen $a \leq Re(z) \leq 1$ beschränkt (verwende Voraussetzung beschränkt auf $1 \leq Re(z) < 2$ und Funktionalgleichung, sowie dass $\{z \in \mathbb{C}, |Im(z)| \leq 1 \text{ und } a \leq Re(z) \leq 1\}$ kompakt ist).
Zur Bereitstellung des Satzes von Liouville betrachten wir $G(z) = g(z)g(1-z)$ mit $G(z+1) = -G(z)$. Dann ist $G(z)$ auf $0 \leq Re(z) \leq 1$ beschränkt, also auf ganz $\mathbb{C}$ wegen der (anti)-Periodizität. Also ist $G(z)$ konstant. Wegen $g(1) = 0$ folgt $G(z) \equiv 0$, $g \equiv 0$ und $f(z) = \Gamma(z)$.

Bemerkung: Es gilt: $\Gamma(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ (Beweis später) und die holomorphe Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$ hat Nullstellen in $-\mathbb{N}$. Wir wollen diese nun berechnen. Vgl. mit $(1+z)(1+\frac{z}{2})(1+\frac{z}{3})\cdots$.

Satz (Gauss'sche Produktentwicklung): *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z \cdot (z+1)\cdots(z+n)}{n! \cdot n^z} \quad \textit{mit} \quad n^z = e^{z \cdot \log(n)}.$$

Beweis: ([Heuser, Analysis II, p. 196]) Aus der Analysis wissen wir, dass $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t}{n})^n$ für $t \in \mathbb{R}$.

Für $0 \leq t \leq n$ gilt: $(1-\frac{t}{n})^n \leq (1-\frac{t}{n+1})^{n+1}$ da $h(t) = (1-\frac{t}{z})^z$ für $z > t$ monoton wachsend wegen positiver Ableitung. Setze für $x > 0$:

$$f_n(t) = \begin{cases} (1-\frac{t}{n})^n \cdot t^{x-1} & \text{für } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{für } t > n. \end{cases}$$

Dann gilt: $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$ und $f_n(t) \longrightarrow e^{-t}t^{x-1}$ für $n \longrightarrow \infty$. Mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt:

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \int_0^\infty f_n(t) dt \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

Partielle Integration liefert für $\epsilon > 0$:

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \left((1-\frac{t}{n}^n\frac{t^x}{x})\right)_\epsilon^n + \frac{1}{x}\int_\epsilon^n (1-\frac{t}{n})^{n-1}t^x dt.$$

Mit $\epsilon \longrightarrow 0$ folgt:

$$\int_0^n (1-\frac{1}{n})^n t^{x-1}dt = \frac{1}{x}\int_0^n (1-\frac{t}{n}^{n-1})t^x dt.$$

Partielle Integration der rechten Seite liefert:

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x(x+1)}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-2}t^{x+1}dt.$$

Durch Iteration:

$$\begin{aligned} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}dt \\ &= \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{n^{x+n}}{x+n} \\ &= \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \end{aligned}.$$

Zusammen ergibt sich für $x > 0$ reell:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{\overline{n+1}}}{n!\ n^x}$$

oder:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\ n^x}{x^{\overline{n+1}}}.$$

Die rechte Seite ist, wenn $x > 0$ durch $z \in \mathbb{C}$ ersetzt wird, eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polen in $-\mathbb{N}$ (der Limes ist lokal gleichmässig). Damit gilt die Gleichheit nach dem Identitätssatz auf ganz $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ ist Teilmenge mit Häufungspunkt).

Bemerkung: Man kann statt dessen auch zeigen, dass

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ z^n}{z^{\overline{n+1}}}\right)^{-1}$$

die charakterisierenden Eigenschaften der Γ-Funktion hat, vgl. [Freitag-Busam, p. 199].

Beweis: (a) Setze $G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; z^n}{z^{\overline{n+1}}}$. Dann ist G holomorph auf einem Gebiet, das $\{z \in \mathbb{C}; 1 \leq Re(z) < z\}$ umfasst (als lokal gleichmässiger Limes).

(b) G ist dort beschränkt: $|n^{-z}| = n^{-x}$ und $|z+k| \geq |x+k|$.

(c) Setze $\frac{1}{G_n(z)} = z \cdot e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-\log(n))} \cdot \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{n}) \cdot e^{-\frac{z}{k}}$. Man zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$, und dann folgt durch Rechnung $z\frac{1}{G_n(z+1)} = \frac{z+n+1}{n}\frac{1}{G_n(z)}$, also $G_n(z+1) = \frac{z \cdot n}{z+n+1} G_n(z)$ und $G(z+1) = zG(z)$.

(d) $G_n(1) = 1$, also $G(1) = 1$.

Satz (Euler, 1749): *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}.$$

Speziell:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$
$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Beweis: Die Funktion $\frac{\pi}{sin(\pi z)} = h(z)$ erfüllt $h(z+1) = -h(z)$, ist meromorph auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $z \in \mathbb{Z}$, wobei $\mathrm{Res}(h, -n) = (-1)^n$. Die gleichen Eigenschaften erfüllt $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$. Betrachte also $f(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Dann ist $f(z)$ beschränkt für $1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$ und $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$. In $z \in \mathbb{Z}$ hat sie hebbare Singularitäten, also ist $f(z)$ eine ganze Funktion, und wegen der Periodizität beschränkt auf $\mathbb{C}$. Liouville: $f(z)$ ist konstant. Wegen $f(z) = -f(-z)$ folgt $f = 0$ und $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Bemerkung: (a) (Legendre 1811) $\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{z}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)$, vgl. [Freitag, Busam, p.201]. Beweis wieder durch charakterisierende Eigenschaften der Gamma-Funktion.

(b) $\Gamma(\frac{n+1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n-1}{2}\sqrt{\pi}$ für n gerade bzw. $\Gamma(\frac{n+1}{2}) = \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdots \frac{n-1}{2}\sqrt{\pi}$ falls n ungerade.

(c) Stirling'sche Formel [GKP, p.481]:

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \leq e^{\frac{1}{12n}}.$$

Eine genaue Formel erhält man funktionentheoretisch wie folgt:

Satz: (Stirling) *Sei $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big((z+n+\frac{1}{2}) \cdot \log(1+\frac{1}{z+n}) - 1\Big)$. Dann ist $H(z)$ auf $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_-)$ holomorph (wähle dort den Hauptwert des Logarithmus), erfüllt in jedem Winkelbereich*

$$W_\alpha = \{z; -\pi + \alpha \leq \arg(z) \leq \pi - \alpha\}$$

mit $0 < \alpha \leq \pi$ die Limesbedingung

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in W_\alpha}} H(z) = 0$$

und es gilt:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}.$$

Beweis: ([F-B, p.204], [Remmert, Funktionentheorie II])

Folgerung: *Für $x > 0$ reell gilt:* $0 < H(x) < \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{12x}$ *und damit erhält man die klassische Stirling'sche Formel:*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}.$$

Genauer [GKP, p.481]:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{\phi_{2,n}}{1260n^5}}.$$

Bemerkung: (a) Mit ähnlichen Methoden ergibt sich [F-B, p. 205]:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n) \longrightarrow \gamma = 0,577215664\ldots.$$

γ heisst die *Euler-Mascheronische Konstante.*

(b) Weitere Charakterisierung [F-B, p.206] der Gamma-Funktion: $f : \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(1) = 1$, $f(z+1) = z\cdot f(z)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(z+n)}{n^z f(n)} = 1$. Damit gilt ebenfalls $f = \Gamma$.

(c) $\Gamma(z)\cdot\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$ - die sogenannte "Verdopplungsformel", vgl. [F-B, p. 206].

Binomialkoeffizienten:

Definition: $\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ *für $x \in \mathbb{R},\mathbb{C}$, in beliebigem Ring oder x Variable, und $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\binom{x}{k} := 0$ für $k < 0$ heisst der k-te Binomialkoeffizient.*

Speziell für $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = C_k^n$$

heisst für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $1 \leq k \leq n$ der k-te Binomialkoeffizient. Wir setzen $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ und $\binom{0}{0} = 1$.

Wissen:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

(Beweis erfolgt durch Induktion über $\mathbb{N}$), wobei $\binom{n}{0} := \binom{n}{n} = 1$. Beachte $0! := 1$.

Schreibweise für $\binom{n}{k}$ in Maple: binomial(n,k);

Satz 1: $\#\{A \subset \{1,\ldots,n\}, \#A = k\} = \binom{n}{k}$.

Beweis: Folgt aus der Binomialentwicklung von $(x+y)^n$ vermöge dem Distributivgesetz.

Bemerkung: $n = p$ Primzahl, so teilt p alle $\binom{p}{k}, 1 \leq k \leq p-1$, denn: $\binom{p}{k} \in \mathbb{N}$ aber k teilerfremd zu p. Wegen $\binom{p}{k} = p\cdot\frac{(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$ ist der zweite Faktor in $\mathbb{N}$. In Charakteristik p: $(x+y)^p = x^p + y^p$.

Bemerkung: $\binom{x}{k}$ ist Polynom in x vom Grad k mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, für $k \geq 0$. Beachte: $\binom{n}{n} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, aber $\binom{n}{n} = 0$ für $n \in \mathbb{Z}, n < 0$.

Es gelten:
$\binom{x}{0} = 1$, $\binom{x}{1} = x$, $\binom{x}{2} = \frac{1}{2}x(x-1)$.

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \geq 0, k \in \mathbb{Z}$.

$\binom{x}{k} \neq \binom{x}{x-k}$ für $x \in \mathbb{Z}, x < 0$.

$\binom{x}{k} = \frac{x}{k} \cdot \binom{x-1}{k-1}$ für $k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

$k \cdot \binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k-1}$, für alle $x, k,\ k \in \mathbb{Z}$ (Absorption).

PS: $(x-k)\binom{x}{k} = k\binom{x-1}{k}$ für $k \in \mathbb{Z}$, denn es gilt: $(x-k)\binom{x}{k} = (x-k)\binom{x}{x-k} = x\binom{x-1}{x-k-1} = x\binom{x-1}{k}$ für $x \in \mathbb{N}$. Da beide Seiten Polynom in x vom Grad $k+1$ sind, gilt Identität für alle x.

Satz 2: $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}, \mathit{f\ddot{u}rk} \in \mathbb{Z}.$

Beweis: (a) Ausreichend, die Gleichheit für $x \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Verwende dann kombinatorische Interpretation von $\binom{n}{k}$ wie im Satz vorher.

(b) Alternativ: ausrechnen liefert

$$\begin{aligned}\binom{x-1}{k} + \binom{x-k}{k-1} &= \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!} + \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} \\ &= \frac{(x-1)^{\underline{k}} + k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}}}{k!} \\ &= \frac{(x-1)^{\underline{k-1}} \cdot (x-k) + (x-1)^{\underline{k-1}} \cdot k}{k!} \\ &= \frac{x \cdot (x-1)^{\underline{k-1}}}{k!} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x}{k}\end{aligned}$$

(c) Oder: Wähle $x = n \in \mathbb{N}$ und beweise die Identität mit Induktion über n.

Bemerkung: Schreibt man $C(n,k) = \binom{n}{k}$, so lautet die Rekursion

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1).$$

Satz 3: *Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\binom{x}{0} + \binom{x+1}{1} + \cdots + \binom{x+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}.$$

Beweis: Es gilt $\binom{x+n+1}{n} = \binom{x+n}{n} + \binom{x+n}{n-1}$ und die Behauptung folgt mit Induktion über n.

Satz 4: *Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Beweis: Es gilt $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}$ und Induktion angewandt auf $\binom{n}{m+1} = \binom{0}{m} + \cdots + \binom{n-1}{m}$.

Bemerkung: Die letzten drei Sätze sind äquivalent zueinander (implizieren sich gegenseitig (s. *PS*)). [GKP, p. 161], etwa $4 \Rightarrow 3$: $\sum_{0 \leq k \leq m+n} \binom{k}{m} = \sum_{-m \leq k \leq n} \binom{m+k}{k} = \sum_{-m \leq k \leq n} \binom{m+k}{m} = \sum_{0 \leq k \leq m+n} \binom{k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n+1}{n}$.

Satz 5 (Binomialentwicklung): *Es gilt*

$$(x+y)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k},$$

und zwar als endliche Summe für $\alpha \in \mathbb{N}$; als formale Laurentreihe mit reellen Exponenten für $\alpha \in \mathbb{R}$; als konvergente Laurentreihe für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|\frac{x}{y}| < 1$.

Bemerkung: In den zwei letzten Fällen ist die rechte Seite asymmetrisch in x und y, da $k \geq 0$.

Beweis: O.B.d.A. $x, y \neq 0$. Dividiere dann durch y^α, ersetze $\frac{x}{y}$ durch x und erhalte $(x+1)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$. Das ist gerade die Taylorentwicklung von $(x+1)^\alpha$ in $x = 0$.

Folgerung: *Es gelten:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_k \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 6 (Negation des oberen Index): $\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{k-x-1}{k}$ *für $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. $x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1) = (-1)^k(-x)(1-x)\dots(k-1-x) = (-1)^k(k-x-1)^{\underline{k}}$ für $k \geq 0$, sonst beide Seiten gleich 0.

Bemerkung: Doppelte Negation liefert $\binom{x}{k} = \binom{x}{k}$.

Folgerung: *Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(-1)^m \binom{-n-1}{m} = (-1)^n \binom{-m-1}{n}.$$

Beweis. Beide Seiten sind gerade $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$.

Satz 7: $\sum_{k\leq m} \binom{x}{k} (-1)^k = (-1)^m \binom{x-1}{m}$, *für $m \in \mathbb{Z}$*

Beweis: Mehrfache Negation liefert: $\sum_{k\leq m} \binom{x}{k}(-1)^k = \sum_{k\leq m} \binom{k-x-1}{k} = \binom{-x+m}{m} = (-1)^m \binom{x-1}{m}$.

Satz 8: $\binom{x}{m}\binom{m}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{m-k}$, für $m, k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Nachrechnen für $x \in \mathbb{N}$ und verwenden, dass beide Seiten Polynome in x vom Grad m sind .

Satz 9 (Trinomialentwicklung, s. a. [GKP, p.168]): *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0\leq k,l,m\leq n \\ k+l+m=n}} \frac{(k+l+m)!}{k!\ l!\ m!} x^k y^l z^m.$$

Beweis: Übung mit (∗).

Definition: $\alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{Z}^n, \binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$ heisst *Multinomialkoeffizient.* Damit können wir schreiben:

$$(x+y+z)^n = \sum_{k,l} \binom{n}{k}\binom{n-k}{l} x^k y^l z^{n-(k+l)},$$

$$(x+(y+z))^n = \sum_{k} \binom{n}{k} x^k (y+z)^{n-k}. \quad (*)$$

Satz 10 Vandermonde *(Vandermonde Faltung, 1772), (Chu Shih-Chieh, 1303):*

$$\sum_k \binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. (Siehe alternativen Beweus im Kapitel über erzeugende Funktionen.) Ersetze k durch $k-m$ und n durch $n-m$ und erhalte äquivalente Formel

$$\sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}, n \in \mathbb{Z}.$$

Das sind Polynome in x und y vom Totalgrad n, also ausreichend zu zeigen für $x, y \in \mathbb{N}$. Rechte Seite = Anzahl der Möglichkeiten, n Personen aus x Männern und y Frauen auszuwählen. Linke Seite: Jeder Summand ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Männer und $n-k$ Frauen aus x Männern und y Frauen auszuwählen. Die Gleichheit folgt. Alternativ:

$$\binom{x+y}{n} = \frac{(x+y)!}{n!\ ((x+y)-n)!}$$

für $x, y \in \mathbb{N}$.

Formeln für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(x-k)\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{k-x-1}{k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\binom{x}{m}\binom{m}{k} = \binom{x}{k}\binom{x-k}{m-k}, \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_k \binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}, \quad m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_k \binom{l}{n+k}\binom{y}{n+k} = \binom{l+y}{l-m+n}, \quad l \in \mathbb{N}; m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{y+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{y-m}{n-l}, \quad l \in \mathbb{N};\ m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k\le l} \binom{l-k}{m}\binom{y}{k-n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{y-m-1}{l-m-1}, \quad l,m,n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{0\le k\le l} \binom{l-k}{m}\binom{j+k}{n} = \binom{l+j+1}{m+n+1}, \quad l,m \in \mathbb{N};\ n \ge j \ge 0$$

Vereinfachungstechniken [GKP, p. 172-185]: Wir illustrieren geschickte Umformungsmethoden für Summen mit Binomialkoeffizienten an einigen Beispielen:

Beispiel 1: $\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{n}}{\binom{n}{k}} = (\text{Satz } 8,\ n \ge m \ge 0) = \sum_{k=0}^m \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \cdot \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}^{-1} \cdot \sum_{k\ge 0} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{m-k\ge 0} \binom{n-m+k}{k} = \binom{n-m+m+1}{m}\binom{n}{m}^{-1} = \frac{n+1}{n+1-m}$.

Bemerkung. Probe für $m = 2$, $n = 4$ oder andere Werte passt.

Beispiel 2: Vereinfache $\sum_{k=0}^n \frac{k\cdot\binom{m-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}}$ für $m > n \ge 0$ und $m,n \in \mathbb{N}$. Betrachte dazu:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{m-k-1}{m-n-1} &= \sum_{k=0}^n (m-(m-k))\binom{m-k-1}{m-n-1} \\
&= \sum_{k=0}^n m \cdot \binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^n (m-k)\binom{m-k-1}{m-n-1}. \\
&= m \cdot \sum_{k=0}^n \binom{m-k-1}{m-n-1} - \sum_{k=0}^n (m-n)\binom{m-k}{m-n} \\
&=: mA - (m-n)B
\end{aligned}$$

Wir rechnen

$B = \sum_{k=0}^n \binom{m-k}{m-n} = \sum_{0\le m-k\le n} \binom{m-(m-k)}{m-n} = \sum_{m-n\le k\le m} \binom{k}{m-n} = \sum_{0\le k\le m} \binom{k}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1}$. Dabei wurden im vorletzten Schritt Nullsummanden ergänzt. A ist B mit $m-1$ statt m, also $A = \binom{m}{m-n}$. Zusammen:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k\cdot\binom{n-k-1}{m-n-1}}{\binom{m}{n}} = \frac{(mA-(m-n)B)}{\binom{m}{n}} = \frac{n}{m-n+1}\frac{\binom{m}{m-n}}{\binom{n-k}{k}} = \frac{n}{m-n+1}.$$

Beispiel 3: Vereinfache $A_n = \sum_{k\le n} (-1)^k \binom{n-k}{k}, n \in \mathbb{N}$. Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	1	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1

Idee: Finde Rekursion für A_n. Entweder durch unbestimmten Ansatz $a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_d A_{n-d} = 0$ oder via:

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k\leq n}(-1)^k\binom{n-k}{k} = \sum_{k\leq n}(-1)^k\binom{n-1-k}{k} + \sum_{k\leq n}(-1)^k\binom{n-1-k}{k-1}\\
&= \sum_{k\leq n-1}(-1)^k\binom{n-1-k}{k} + \sum_{k+1\leq n}(-1)^{k+1}\binom{n-2-k}{k}\\
&= A_{n-1} + \underbrace{\binom{-1}{n}}_{(-1)^n}(-1)^n - \sum_{k\leq n-2}\binom{n-2-k}{k}(-1)^k - \underbrace{\binom{-1}{n-1}}_{(-1)^{n-1}}(-1)^{n-1}\\
&= A_{n-1} - A_{n-2}
\end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Daraus folgt $A_n = A_{n-6}$ für $n \geq 6$, und $A_0, \ldots, a_5$ wie angegeben.

PS: Problem 4,5,6,7,8 in [GKP, p. 180-185].

Weitere Techniken: [GKP, p. 186-196].

Erzeugende Funktionen (vgl. späteres Kapitel):

Definition: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in Körper oder Ring, so heisst* $A(x) := \sum_{k\geq 0} a_n x^n$ *die zu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gehörige erzeugende Funktion,* $A(x) \in K[\![x]\!]$. *Weiters definiert man die "exponentielle erzeugende Funktion" durch* $\tilde{A} := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Bemerkung. Mit erzeugenden Funktionen lassen sich viele Rekursionen schnell lösen. Dazu:

Beispiel 1: $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = a_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n\\
&= 1 + x + \sum_{n\geq 2}(a_{n-1} - a_{n-2})x^n\\
&= 1 + x + \sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n\\
&= 1 + x + x\cdot\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} - x^2\cdot\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2}\\
&= 1 + x + x\cdot(A(x) - 1) - x^2\cdot A(x).
\end{aligned}$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
A(x)[x^2 - x + 1] &= 1\\
A(x) &= \frac{1}{1-(x-x^2)} = 1 + (x - x^2) + (x - x^2)^2 + \ldots\\
&= 1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 + \ldots\\
&= 1 + x + 0\cdot x^2 - x^3 - x^4 + 0\cdot x^5 + x^6 + x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

Beispiel 2: $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1.$

Dies ist die Fibonacci-Folge:

$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = x\cdot\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + x^2\cdot\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} + 1 + x = x(A(x) - 1) + x^2 A(x) + 1 + x$

Also: $A(x) \cdot [1 - x - x^2] = 1 \quad \Rightarrow A(x) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = -\frac{1}{(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$, wobei $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$ goldener Schnitt.

Weiters: $A(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x})$

Damit $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ und der zweite Summand geht sehr schnell gegen 0, also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

Definition: $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ Folge in K indiziert durch Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (oder $\mathbb{Z}^n$) liefert erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha \in K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ mit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Definition (Shiftoperator): $S_i : K[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \longrightarrow K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, definiert durch $x^\alpha \to x^{\alpha - e_i}$, heisst der *i-te Shiftoperator.* ($\mathrm{Id} - S_i$ ist das diskrete Analogon zur partiellen Ableitung bzgl. x_i.)

Speziell: $n = 1 \;\; S_1 = S : \;\; K[\![x]\!] \to K[\![x]\!], \;\; \sum_{k\geq 0} a_k x^k \;\to\; \sum_{k\geq 1} a_k x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} a_{k+1} x^k$.

Bemerkung: $P \in K[s]$ Polynom in einer Variablen, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit entsprechender erzeugenden Funktion $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$. Dann ist $P(S)a_k = 0$ für alle $k \geq 0$ eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten von der Ordnung $d = \deg(P)$.
Genauer: Ist $P = \sum_{i=0}^d c_i s^i$, dann ist $P(S)a_k = \sum_{i=0}^d c_i a_{k+i} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Multiplikation mit x^k und Summation über k liefert $\sum_k (P(S)a_k)x^k = \sum_k \sum_{i=0}^d c_i a_{k+1} x^k = P(S)A(x) = 0$.
Weiters: $(SA(x)) \cdot x = a_0 + A(x)$ oder $SA = \frac{a_0 + A}{x}$. Damit lässt sich $P(S)A = 0$ nach A lösen.

Bemerkung: S operiert auf Folgen durch Rechtsshift, auf Potenzreihen durch Linksshift auf den Exponenten von x.

Partitionen [Comtet, p. 94-99], [Andrews]:

Definition: Eine *Partition* einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ ist eine Folge $\lambda \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ und $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$. k heisst die Länge der Partition (klar: $k \leq n$).
$p(n) := \#\{\lambda \text{ Partitionen von } n\}$, $p(0) := 1$.

Beispiel: $1 = (1)$,
$2 = (1^2) = (2),\; p(2) = 2$,
$3 = (1^3) = (12) = (3),\; p(3) = 3$,
$4 = (1^4) = (1^2 2) = (2^2) = (13) = (4),\; p(4) = 5$,
$5 = (1^5) = (1^3 2) = (1^2 3) = (14) = (23) = (5),\; p(5) = 7$,

Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5	6	10
$p(n)$	1	1	3	5	7	11	42

n	20	50	100	200
$p(n)$	627	204226	190569292	397299029388

Definition: $n \geq 1,\;\; 1 \leq k \leq n,\;\; p(n,k) = \#\{\lambda \text{ Partition von } n \text{ der Länge } k\}$.

Bemerkung: Ist λ Partition von n der Länge k, so setze $x_i = \#\{\lambda_j,\; \lambda_j = i\}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = n$, sowie $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Umgekehrt induziert jede Zerlegung $n = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$ mit $x_i \geq 0$ eine Partition λ von n durch $\lambda = (\underbrace{n, \ldots, n}_{x_n}, \underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{x_{n-1}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{x_1})$.

Satz: *Für* $k \geq n \geq 1$ *ist* $\tilde{p}(n,k) = p(n)$ *wobei* $\tilde{p}(n,k) = \#\{\lambda$ *Partition von* n, *Länge* $\lambda \leq k\}$.
Für $n \geq k \geq 2$ *gilt die Rekursion:*

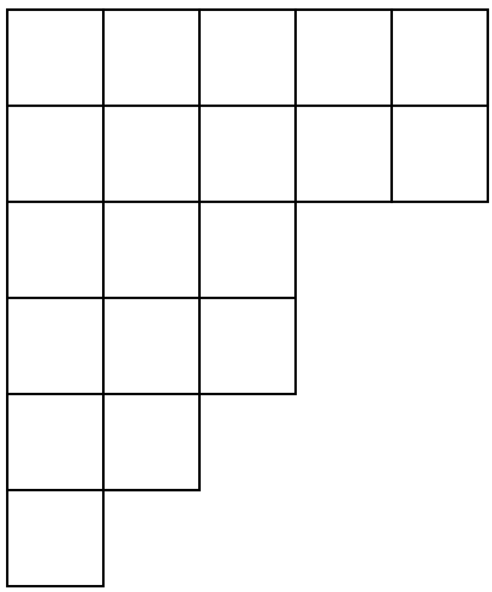
$$\tilde{p}(n,k) = \tilde{p}(n,k-1) + \tilde{p}(n-k,k),$$
$$\tilde{p}(n,1) := 1,\ \tilde{p}(0,k) := 1$$

Beweis: Für $k \geq n$ ist die Aussage klar. Sei also $n \geq k \geq 2$. Es gilt: $\tilde{p}(n,k) = \#\{x \in \mathbb{N}^n,\ \sum_{i=1}^n ix_i = n,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq k\} = \#\{x \in \mathbb{N}^n,\ \sum_{i=1}^n ix_i = n,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq k-1\} + \#\{x \in \mathbb{N}^n,\ \sum ix_i = n,\ \sum x_i = k\}$.
Die zweite Anzahl ist aber (wegen $x_1 \geq 0$) gleich $\#\{x \in \mathbb{N}^{n-1},\ \sum_{i\geq 1}^n (i-1)x_i = n-k,\ \sum_{i=2}^n x_i \leq k\}$.
Damit $\tilde{p}(n,k) = \tilde{p}(n,k-1) + \tilde{p}(n-k,k)$.

Satz: *Sei* $P(x) = \sum_{k\geq 0} p(k)x^k$ *die erzeugende Funktion der* $p(k)$. *Dann gilt*
$$P(x) = \prod_{i\geq 1}(1-x^i)^{-1} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

Beweis: $(1-x^i)^{-1} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \ldots$ und damit
$$\prod_{i\geq 1}(1-x^i)^{-1} = \prod_{i\geq 1}(1 + x^i + x^{2i} + \ldots) = \prod_{i\geq 1}(\sum_{k\geq 0} x^{ki}) = \sum_{k_1\geq 0}\sum_{k_2\geq 0}\ldots x^{k_1+2k_2+3k_3+\ldots}.$$
Also ist der n-te Exponent gerade gleich
$$\#\{k \in \mathbb{N}^n,\ \sum_{i=1}^n ik_i = n\} = p(n).$$

Bemerkung: (a) Es werden häufig Partitionen mit Zusatzbedingungen betrachtet, etwa λ_i ungerade, oder alle λ_i verschieden, oder $|\lambda_i - \lambda_j| \geq 2$, oder $\lambda_i \equiv \pm 1$ oder 4 *mod* 5.
(b) Ist λ Partition von n, so zeichnet man dazu ein Young-Diagramm (werden in der Darstellungstheorie zur Klassifikation von Darstellungen endlicher Gruppen verwendet).
Etwa: $\lambda = (5,5,3,3,2,1)$



Also ist λ_i gerade die Länge der Zeilen des Diagramms.

Die duale Partition λ^* ist gegeben durch die Längen λ_i^* der Spalten des Diagramms.

Klar: $(\lambda^*)^* = \lambda$.

Satz [Andrews, p.8]:

$\tilde{p}(n,k) := \#\{\lambda \text{ Partition von } n \text{ der Länge } \geq k\} = \#\{\lambda \text{ Partition von } n \text{ mit } \lambda_i \geq k\}$

Beweis: Die Konjugation $\lambda \longrightarrow \lambda^*$ definiert Bijektion zwischen den beiden Mengen.

Satz (Euler): *Seien $P_g(n)$ und $P_u(n)$ die Partitionen von n mit lauter verschiedenen geraden bzw. ungeraden Summanden. Dann gilt:*

$$P_g(n) = P_u(n) \quad \textit{für} \quad n \neq \frac{1}{2}m(3m \pm 1) \textit{ und } m \in \mathbb{N},$$

$$P_g(n) = P_u(n) + (-1)^m \quad \textit{für} \quad n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1) \quad \textit{und} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beweis: [Andrews, p.10].

Folgerung: [Andrews, p.11] *Es gilt:*

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot x^{\frac{1}{2}m(3m-1)} \cdot (1+x^m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \cdot x^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$.

Beweis: vgl. [Andrews, p.11] oder PS.

Bemerkung: $\frac{1}{2}m(3m \pm 1)$ heissen Euler's Pentagon-Zahlen.

Kapitel III: Spezielle Zahlen

Neben den Fakultäten $a_n = n!$ mit Rekursion $a_n = n \cdot a_{n-1}$ und den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = C_k^n = C(n,k)$ mit Rekursion $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$ gibt es eine Reihe von anderen Zahlenfolgen, die in der Kombinatorik eine wichtige Rolle spielen. Für viele gibt es entsprechende Polynomfolgen gleichen Namens, deren Auswertung in 0 gerade die entsprechenden Zahlen sind. Der Zusammenhang zwischen den Polynomfolgen wird durch den umbralen Kalkül erklärt.

mit $A(0,0) = 1$, $A(0,k) = 0$ für $k \geq 1$ und $A(n,k) = 0$ für $k < 0$.Es gibt zwei Arten von diesen Zahlen, die in gewissem Sinn zueinander dual sind (die durch die einen gebildete Matrix ist die Inverse der anderen Matrix). Seien $n, k \in \mathbb{N}$:

$$s(n,k) = \left[{n \atop k} \right] \qquad \text{Stirling Zahlen 1. Art}$$

$$S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\} \qquad \text{Stirling Zahlen 2. Art}$$

Für Tafeln mit Wertetabelle siehe auch [GKP, p.258 + 259].

Definition: $S(n,k) = 0$ für $0 \leq n < k$, $S(0,0) = 1$, $S(n,k) = 0$ für $k < 0$ und $S(n,k) = \#\{$Partition von $\{1,\dots,n\}$ in k (nichtleere disjunkte) Teilmengen$\}$ für $1 \leq k \leq n$.

Beispiele: $n = 4$, $k = 2$ liefert:

$$\{1,2,3\} \cup \{4\}, \{1,2,3\} \cup \{3\}, \{1,3,4\} \cup \{2\}, \{2,3,4\} \cup \{1\}, \{1,2\} \cup \{3,4\}, \{1,3\} \cup \{2,4\}, \{1,4\} \cup \{2,3\}$$

also $S(4,2) = 7$.

Wertetabelle für $S(n,k)$:

	0	1	2	3	4	5	k
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	11	1	
n							

Bemerkung: Es gilt $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ für $n \geq 1$, denn: Eine der beiden Teilmengen, etwa die zweite, enthält n, und die erste ist eine (nichtleere) Teilmenge von $\{1,2,\dots,n-1\}$. Davon gibt es $2^{n-1} - 1$ Stück ($\#\mathrm{Pot}(x) = 2^{\#x}$).

Satz 1: *Für $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt die Rekursion*

$$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

Beweis: [GKP, p.259; Com, p.208] Für eine Partition von $\{1,2,\dots,n\}$ in k Mengen nummerieren wir die Mengen so, dass die k-te Menge das Element n enthält. Entweder ist die k-te Menge 1-elementig, dann gibt es $S(n-1,k-1)$ Möglichkeiten für die Auswahl der restlichen $k-1$ Mengen, oder sie ist nicht 1-elementig, dann können wir das Element zu einer Partition von $\{1,2,\dots,n-1\}$ in k Teilmengen dazunehmen, und davon gibt es $k \cdot S(n-1,k)$ Möglichkeiten. Also $S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.

Bemerkung: Man kann zeigen ([Com, p.204]), dass

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{0 \le j \le k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{1 \le i \le k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n,$$

sowie

$$\sum_{n \ge k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

für $k \ge 0$, und

$$\sum_{n,k \ge 0} S(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = e^{y(e^x - 1)}$$

gilt.
Siehe auch [GKP, p.351] und [Com, p.206], sowie Kapitel über umbralen Kalkül.

Satz 2: $\sum_k S(n,k) x^{\underline{k}} = x^n$ *für alle* $n \ge 0$ *oder in Matrixschreibweise für* $S = (S(n,k))_{n,k \in \mathbb{N}}$*:*

$$(x^0, x^1, \dots)^T = S \cdot (x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \dots)^T$$

Beweis: [GKP, p.262] Induktion über n. Verwende $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}$. Damit:

$$\begin{aligned} x \cdot x^{n-1} &= x \cdot \sum_k S(n-1,k) x^{\underline{k}} \\ &= \sum_k S(n-1,k) x^{\underline{k+1}} + \sum_k S(n-1,k) k x^{\underline{k}} \\ &= \sum_k S(n-1,k-1) x^{\underline{k}} + \sum_k S(n-1,k) k x^{\underline{k}} \\ &= \sum_k \left(S(n-1,k-1) + k S(n-1,k) \right) x^{\underline{k}} \\ &= \sum_k S(n,k) x^{\underline{k}} \ . \end{aligned}$$

Bemerkung: (a) Hier zeigt sich der Vorteil, die Summation über alle $k \in \mathbb{Z}$ laufen zu lassen.
(b) $S = (S(n,k))_{n,k \ge 0}$ ist "unendlich dimensionale unipotente" Dreiecksmatrix, mit inverser Matrix

$$S^{-1} = 1 - (S-1) + (S-1)^2 - (S-1)^3 + \dots .$$

Satz 2': $\sum_k (-1)^{n-k} S(n,k) x^{\overline{k}} = x^n$ *für alle* $n \ge 0$.

Beweis: Es gilt $x^{\underline{k}} = (-1)^n \cdot (-x)^{\overline{k}}$ und die Identität folgt aus Satz 2.

Bemerkung: Man prüft leicht nach:
(a) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.
(b) $S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k,m) = \sum_{k=0}^n S(k,m)(m+1)^{n-k}$ für $m, n \ge 0$.
(c) $S(m+n+1, m) = \sum_{k=0}^m k \cdot S(n+k, k)$.

Definition: $s(n,k) = \left[{n \atop k} \right] = \#\{$Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit k Zyklen$\}$ für $n, k \ge 1$ heisst die *Stirling-Zahl 1. Art.* Wir setzen $s(0,0) = 1$, $s(0,k) = 0$ für $k \ge 1$, $s(n,k) = 0$ für $k < 0$.

Beispiel: $n = 4,\ k = 2$ liefert:

$$(123)(4),\ (124)(3),\ (134)(2),\ (234)(1),\ (132)(4),\ (142)(3),$$

$$(143)(2),\ (243)(1),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23).$$

Bemerkung : $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$, da jede Permutation durch Zykeldarstellung eindeutig bestimmt.

Wertetabelle:

	0	1	2	3	4	5	k	$\sum$
0	1							1
1	0	1						1
2	0	1	1					2
3	0	2	3	1				6
4	0	6	11	6	1			24
5	0	24	50	35	10	1		120
n								

Bemerkung: Es gilt:
(a) $s(n,1) = (n-1)! = \#\{\text{Permutationen von } \{1,\cdots,n\}, \text{ die ein Zykel sind}\}$.
(b) $s(n,k) \geq S(n,k)$, da jede Partition zumindest eine Zykelzerlegung liefert.
(c) $s(n,n-1) = S(n,n-1) = \binom{n}{2}$

Satz 3: $s(n,k) = (n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1)$ *für* $n \geq 1, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: [GKP, p.261] Jede Permutation von $\{1,2,\dots,n\}$ mit k Zykeln macht entweder aus n einen eigenen Zykel (dafür gibt es $s(n-1,k-1)$ Möglichkeiten) oder fügt n einer Permutation von $\{1,\dots,n\}$ mit k Zykeln hinzu, indem n zwischen oder hinter $1,\dots,n-1$ eingefügt wird und dabei immer dem vorhergehenden Zykel zugerechnet wird (dafür gibt es $(n-1)\cdot s(n-1,k)$ Möglichkeiten). Damit folgt die Behauptung.

Beispiel: $n = 4$: Der Zykel (123) liefert durch Einfügen von 4 die Zykel (1234), (1243) und (1423); beachte: (4123) = (1234). Die Permutation (12)(3) liefert durch Einfügen von 4 die Permutationen (12)(34), (124)(3), (142)(3) (und (412)(3) = (124)(3)).

Bemerkung: Die Erzeugende Funktion von $s(n,k)$ (mit Vorzeichen) ist

$$\sum_{n,k} s(n,k)(-1)^{k+n}\frac{x^n}{n!}y^k = (1+x)^y,$$

$$\sum_{k} s(n,k)(-1)^{k+n}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\log_k(1+x).$$

Satz 4: $\sum_k s(n,k)x^k = x^{\overline{n}},\ n \geq 0$ *oder in Matrixschreibweise mit* $s = (s(n,k))_{n,k\geq 0}$*:*

$$\left(x^{\overline{0}}, x^{\overline{1}}, \dots\right)^T = s \cdot \left(x^0, x^1, \dots\right)^T.$$

Beweis: [GKP, p.263] Es gilt $(x+n-1)x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$ und daraus folgt wie im Beweis von Satz 2, dass: $(x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_k s(n-1,k)x^k = \sum_k s(n,k)x^k$. Mit Induktion folgt die Behauptung.

Satz 4': $\sum_k s(n,k)(-1)^{n-k}x^k = x^{\overline{n}}$, für $n \geq 0$.

Folgerung: $\tilde{s}(n,k) := s(n,k)(-1)^{n-k}$ *liefert* $(\tilde{s}(n,k))_{n,k} = (S(n,k))^{-1}_{n,k}$.

Bemerkung: [GKP, p.264] Es gilt $s(n+1,m+1) = \sum_k \binom{k}{m} s(n,k)$ für $m,n \geq 0$ und $s(n,m) = \sum_k (-1)^{m-k}\binom{k}{m} s(n+1,k+1)$ und viele weitere Identitäten.

Definition: Die durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(x)}{k!} y^k = \left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right)^{x+1}$$

definierten Polynome $S_k(x)$ heissen die Stirling-Polynome", wobei $z^x = e^{x\cdot\log(z)}$. Beachte hier: $z(y) = y\cdot(1-e^{-x})^{-1} = y\cdot(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}-\dots)^{-1} = (1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{6}-\frac{y^3}{24}+\dots)^{-1}$ ist Potenzreihe mit konstantem Term gleich 1, also existiert $\log(z(y))$ als formale Potenzreihe, $\log(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - + \dots)$.

Satz 5: *Es gilt:*

$$S_k(n) = \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} \cdot s(n+1, n-k+1) \qquad \textit{für } n \geq k \geq 0 \textit{ in } \mathbb{N},$$

$$s_k(n) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(k-n-1)!} \cdot S(k-n-1, -n-1) \qquad \textit{für } n \in -\mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: [Roman, p.129]

Euler'sche Zahlen [GKP, p. 267; Com, p. 51+242] :

Definition: $A(n,k) = \left\langle {n \atop k} \right\rangle = \#\{$Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ mit k Anstiegen$\}$ heissen die *Euler'schen Zahlen* (nicht zu verwechseln mit den Euler Zahlen E_k [Roman, p.102; Com, p.48]), wobei für $\sigma \in S_n,\ \sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, Anstieg an der j-ten Stelle bedeutet, dass $\sigma_j < \sigma_{j+1}$.
$(A(0,0) = 1,\ A(0,k) = 0$ für $k \geq 1$ und $A(n,k) = 0$ für $k < 0.)$

Beispiel: $n = 4,\ k = 2$ liefert $A(4,2) = 11$ wegen

1324	1423	2314	2413	3412	
1243	1342	2341	2134	3124	4123

Wertetabelle:

	0	1	2	3	4	5	n
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
k							

Bemerkung: Es gilt die Symmetrie $A(n,k) = A(n,n-1-k)$ für $n \geq 1$, denn $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ hat $n-1-k$ Anstiege genau dann, wenn $\sigma^* = (\sigma_n,\dots,\sigma_1)$ k Anstiege hat.

Satz 6: $A(n,k) = (k+1)\cdot A(n-1,k) + (n-k)\cdot A(n-1,k-1)$ *für* $n \geq 1$.

Beweis: Jede Permutation $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ von $\{1,\dots,n-1\}$ liefert Permutation von $\{1,\dots,n\}$ durch Einfügen von n an einer Stelle in $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$. Sei etwa n an der i-ten Stelle eingesetzt, $\overline{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},n,\sigma_i,\dots,\sigma_{n-1}) \in S_n$. Ist $i = 1$ oder $\sigma_{i-1} < \sigma_i$, so bleibt die Anzahl der Anstiege gleich.

Ist $i = n$ oder $\sigma_{i-1} > \sigma_i$, so erhöht sich die Anzahl der Anstiege um 1. Die Anzahl der Möglichkeiten $\overline{\sigma}$ aus σ mit genau k Anstiegen zu erhalten ist $(k+1)$-Mal die Anzahl der σ mit genau k Anstiegen plus $((n-2)-(k-1)+1)$-Mal die Anzahl der σ mit $k-1$ Anstiegen. Also

$$A(n,k) = (k+1)\cdot A(n-1,k) + (n-k)\cdot A(n-1,k-1).$$

Bemerkung: Comtet schreibt $A^c(n,k) = A(n,k-1)$ statt $A(n,k)$.

Satz 7 (Worpitzky's Identität 1883): *Es gilt:*

$$x^n = \sum_k A(n,k)\cdot\binom{x+k}{n} \quad \textit{für } n \geq 0.$$

Beweis: [Com, p.243] Beide Seiten sind polynomial in x vom Grad n, also genügt es, die Identität für $x = 0,\dots,n$ zu verifizieren. Wir verwenden die Identitäten

$$\sum_{k,n} A(n,k-1)\cdot\frac{x^n}{n!}\cdot y^k = \frac{1-y}{1-y\cdot e^{x(1-y)}} \qquad \text{[Com, p.51]}$$

und

$$A(n,k-1) = \sum_{0\leq 1\leq k}(-1)^i\cdot\binom{n+1}{i}\cdot(k-i)^n \qquad \text{[Com, p.243]}$$

und erhalten mit Rechnung

$$\begin{aligned}\sum_k A(n,k-1)y^k &= \sum_{0\leq i\leq k}(-1)^{k-i}\binom{n+1}{k-i}i^n y^k \\ &= \sum_{i\geq 0}\left[i^n y^i \sum_{k\geq i}\binom{n+1}{k-i}(-y)^{k-i}\right] \\ &= (1-y)^{n+1}\cdot\sum_{i\geq 0} i^n y^i\ .\end{aligned}$$

Damit: $\sum_{i\geq 0} i^n y^i = (1-y)^{-n-1}\cdot\sum_{k=1}^n A(n,k-1)y^k$ oder nach Koeffizientenvergleich bei y^i:

$$i^n = \sum_k A(n,k-1)\cdot\binom{n+i-k}{n} \qquad \text{für } 0\leq i\leq n.$$

PS: Alternativer Beweis durch Induktion über n, verwende wie in exercise 6.14 [GKP, p. 310+550] die Identität:

$$x\cdot\binom{x+k}{n} = (k+1)\cdot\binom{x+k}{n+1} + (n-k)\cdot\binom{x+k+1}{n+1}.$$

Satz 8: (a) $\sum A(n,k-1)\frac{x^n}{n!}y^k = \frac{1-y}{1-ye^{x(1-y)}}$ [Com, p.51].
(a') $\sum A(n,k-1)\frac{x^n}{n!}y^{k-1} = \frac{1-y}{e^{x(y-1)}-y}$ [Com, p.51].
(b) $A(n,k-1) = \sum_{0\leq i\leq k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-i)^n$ [Com, p.243].

Beweis: (a') Sei $A'(x,y) = \frac{1-y}{e^{x(y-1)}-y}$ wie in (a'). Dann folgt durch Rechnung

$$(y-y^2)\cdot\partial_y A' + (xy-1)\cdot\partial_x A' + A' = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die definierende Rekursion

$$A(n,k) = (k+1)A(n-1,k) + (n-k)A(n-1,k-1)$$

von $A(n,k)$ aus Satz 6 mit gewissen Anfangsbedingungen wie für die $A(n,k)$, woraus die Gleichheit folgt.
(a) Es gilt $A(x,y) = A'(xy, \frac{1}{y}) = 1 + y(A'(x,y) - 1)$ und die Behauptung folgt durch Rechnung.
(b) Nach (a) gilt $\sum A(n,k-1)\frac{x^n}{n!}y^k = \frac{1-y}{1-ye^{x(1-y)}} = (1-y)\cdot\sum_{l\geq 0} y^l e^{lx(1-y)} = \sum_{l,n\geq 0}\frac{l^n}{n!}x^n y^l (1-y)^{n+1} = \sum_{j,l,n\geq 0}(-1)^j \frac{l^n}{n!}\binom{n+1}{j}x^n y^{j+l}$ und Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung.

Definition: $A_n(x) = \sum_k A(n,k-1)x^k$ heissen die *Euler'schen Polynome* ([Com, p.244]). Die Polynome $E_n(x)$ definiert durch $\sum E_n(x)\frac{y^n}{n!} = (e^y+1)^{-1}\cdot 2\cdot e^{yx}$ heissen die *Euler-Polynome* ([Com, p.48]), und E_n definiert durch $\sum E_n \frac{y^n}{n!} = \left(e^{2y}+1\right)^{-1}\cdot 2\cdot e^y$ heissen die *Euler-Zahlen.* Es gilt $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$ und $E_n(x) = \sum_k \binom{n}{k}2^{-k}E_k(x-\frac{1}{2})^{n-k}$ (Wertetabelle siehe in [Com, p. 48+78]).

Wertetabelle für E_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
E_n	1	0	-1	5	-61	1385	-50521	2702765

Bemerkung: Es gibt auch Euler-Polynome $E_n^{(\alpha)}(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, und $E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$. Siehe dazu [Rom, p.102]. Weiters gilt ([Rom, p.102]):

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{2^k E_k(0)}{k!}(iy)^k &= \frac{2}{e^{2iy}+1} = 1 - i\tan(y),\\ \sum_k \frac{2^k E_k(\frac{1}{2})}{k!}(iy)^k &= \frac{2}{e^{2iy}+1}e^{iy} = \sec(y)\end{aligned},$$

und daher heissen die $2^k E_k(0)$ *Tangenszahlen*, $E_k = 2^k E_k(\frac{1}{2})$ *Secanszahlen* (vgl. [Com, p.258] für kombinatorische Interpretation dieser Zahlen).

Satz 9: (a) $A_n(x) = x\cdot\sum_{1\leq k\leq n} k!\ S(n,k)(x-1)^{n-k}$.
(b) $\sum_{k\geq 0} k^n \cdot x^k = (1-x)^{-(n+1)}A_n(x)$.

Beweis: [Com, p. 244-245].

Bernoulli Zahlen (Bernoulli, 1654-1705) :

[GKP, p. 283-290; Com, p. 48-220; Rom, p. 93-100]

Definition: Die *Bernoulli Zahlen* B_n und die *Bernoulli Polynome* $B_n(x)$ sind definiert durch:

$$\begin{aligned}\sum_n B_n\frac{y^n}{n!} &= (e^y-1)^{-1}\cdot y,\\ \sum_n B_n(x)\frac{y^n}{n!} &= (e^y-1)^{-1}\cdot y\cdot e^{yx}\end{aligned}$$

mit $B_n = B_n(0) \in \mathbb{Q}$ [Com, p.28].

Wertetabelle für B_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8

B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$

n	9	10	11	12	14	16	18
B_n	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$

Satz 10: *Die Bernoulli Zahlen erfüllen die (unbeschränkte) Rekursion*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \qquad \textit{für } n \geq 1$$

$$B_0 = 1$$

Beweis: [GKP, p.284].

Satz 11: *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} \cdot B_k \cdot n^{m+1-k}.$$

Beweis: [GKP, p. 283] durch Manipulation mit den Summen und der Anwendung diverser Umformungstricks.

PS: Beweise Satz 4 mit erzeugenden Funktionen ([GKP, p.367]).

Satz 12: (a)

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} S(n,k).$$

(b)

$$\sum_k s(n,k) B_k = \frac{(-1)^n n!}{n+1}.$$

Beweis: Hinweise in [Com, p.230], vgl. auch [GKP, p. 289/290]

Satz 13: (a)

$$z \cdot \cot(z) = \sum_{k \geq 0} (-4)^k B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{z^2}{k^2 \pi^2 - z^2}.$$

(b)

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!} 2^{2n-1} \pi^{2n} B_{2n} \qquad \text{für } n \geq 1$$

(c)

$$\tan(z) = \sum_{k \geq 0} (-1)^{k-1} 4^k (4^k - 1) B_{2k} \frac{1}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Beweis: [GKP, p.286].

Satz 14: *Die Bernoulli Polynome erfüllen die Funktionalgleichung*

$$B_n(x+1) = B_n(x) + n x^{n-1}.$$

Beweis: Einsetzen in erzeugende Funktion ([Rom, p.95]).

Fibonacci-Zahlen [GKP 290-301]:

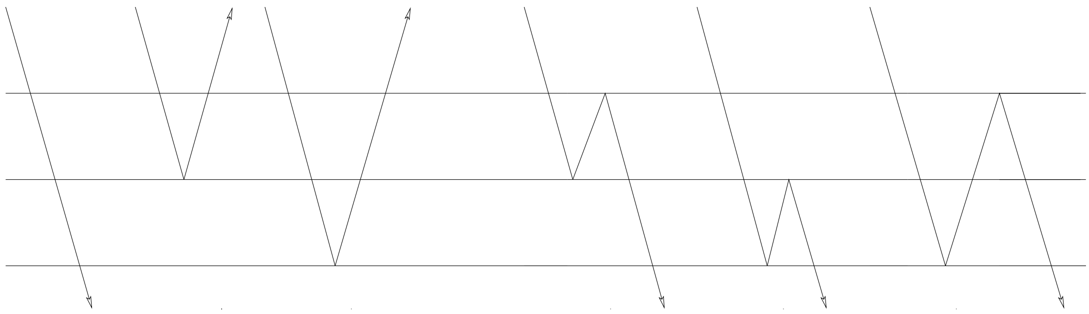
Definition: *Die Fibonacci-Zahlen F_n werden durch die Rekursion 2. Ordnung gegeben: (Fibonacci 1202)*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2,$$
$$F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6
F_n	0	1	1	2	3	5	8

Beispiel: Zwei Glasscheiben werden aufeinander gelegt, und Lichtstrahlen werden von ihnen reflektiert wie folgt:

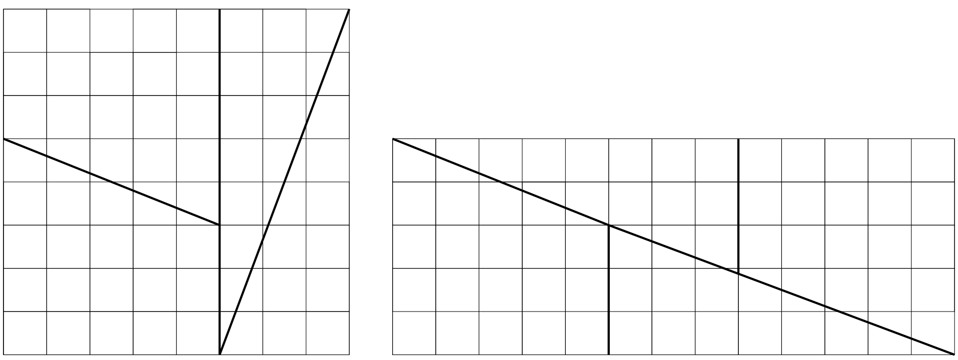


Die Anzahl der Durchgangsmöglichkeiten bei n Reflexionen ist F_{n+1} [GKP, p.292].

Satz 15 (Cassini): *Es gilt*
$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \textit{für } n \geq 1.$$

Beweis: Induktion über n: $n = 1$: OK. $n > 1$: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) = -(F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) = -(-1)^{n-1}$.

Beispiel: Teile Schachbrett wie folgt, klebe es zusammen und erhalte 65 Quadrate [GKP, p.293].



PS: Führe dies aus für ein $F_n \times F_n$-Schachbrett (verwende Unterteilungen gegeben durch F_{n+1}, F_n, F_{n-1} und F_{n-2}) und erhalte $F_{n-1} \times F_{n+1}$-Rechteck mit 1 mehr oder weniger Quadraten nach Cassini.

Bemerkung: Iteration der Rekursion liefert [GKP, p.294]

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$

für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ (wobei $F_{-n} := (-1)^{n-1} F_n$ durch Fortsetzung der Rekursion auf negative Indizes). Setzen von $k = n$ und Iteration liefert, dass F_n jedes F_{mn} teilt, $m \geq 1$. Etwa $F_{15} = 610, F_3 = 2, F_5 = 5$. Es gilt sogar (exercise 6.27, [GKP,p. 312+551])

$$ggT(F_m, F_n) = F_{ggT(m,n)}.$$

Zum Beispiel: $ggT(F_{12}, F_{18}) = ggT(144, 2584) = 8 = F_6$.

Satz 16 (Zeckendorf 1972): *Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat eindeutige Darstellung*

$$n = \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k F_k \quad mit \quad 0 \leq \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} \leq 1,\ \varepsilon_k \in \{0,1\} \qquad \text{für alle } k.$$

Beispiel: $1\,000\,000 = 832\,040 + 121\,393 + 46\,368 + 144 + 55 = F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}$.

Beweis: Wähle k_0 maximal mit $F_{k_0} \leq n$, schreibe dann $n - F_{k_0} = \sum_{i \geq 1} \tilde{\varepsilon}_i F_i$ mit $\tilde{\varepsilon}_i = 0$ für $i \geq k_0 - 1$. Benutze dazu, dass $F_{k_0} \leq n < F_{k_0+1}$ also $n - F_{k_0} < F_{k_0+1} - F_{k_0} = F_{k_0-1}$. Damit Existenz. Eindeutigkeit: Ist k_0 maximal mit $F_{k_0} \leq n$, so muss $\varepsilon_{k_0} = 1$ sein, da $F_{k_0-1} + F_{k_0-3} + \cdots = F_{k_0} - 1 < n$. (Beweis durch Induktion über k_0).

Satz 17: (Euler 1765), (Binet 1843) *Es gilt*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Folgerung: $F_n = \lfloor (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{2} \rfloor$.

Beweis der Folgerung: Da $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot |(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n| < \frac{1}{2}$ für $n \geq 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Bemerkung: Aus der geschlossenen Form für F_n folgt Cassini's Identität (Satz 15).

Beweis des Satzes: $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n(x) x^n$ erzeugende Funktion der F_n erfüllt wegen der Rekursion für die F_n die Funktionalgleichung

$$F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = x,$$

also

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x} \right)$$

Mit Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{1-cx}$ folgt die Behauptung.

Definition: Der Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803 \ldots$ heisst der *goldene Schnitt*, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = -0,61803 \ldots$.

Beispiel: $n = 10:$ $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{10} = 55,00364$, $\quad F_{10} = 55$, $\quad (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{11} = 88,99775$, $\quad F_{11} = 89$.

Bemerkung: $F_{n+2} = \#\{$Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ die keine benachbarten Zahlen enthalten$\} =: G_n$.
Denn: $G_n = \sum_k \binom{n-k}{k}$ nach [Com, p.21: Theorem A]
und $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ für $n \geq 2$.

$G_0 = 1 \quad \emptyset,$
$G_1 = 2 \quad \emptyset,\ \{1\},$
$G_2 = 3 \quad \emptyset,\ \{1\},\ \{2\}.$

Kapitel IV: Erzeugende Funktionen und Rekursionen

[GKP, p. 320-380], [Com, p. 43-52]

Definition: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K, K Körper oder Ring, so heisst

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \in K[\![x]\!]$$

die zugehörige *erzeugende Funktion*, und

$$A^e(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

die zugehörige *exponentielle erzeugende Funktion*. In mehreren Variablen: $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ Folge in K, $A(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha$ mit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, bzw. $A^e(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$ mit $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$

Bemerkung: (a) Die erzeugende Funktion ist eine formale Potenzreihe, Konvergenzfragen sind weitgehend irrelevant.
(b) Wir setzen $a_n = 0, a_\alpha = 0$ für $n < 0$ oder $\alpha \notin \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ sodass $A(x) = \sum_n a_n x^n$ bzw. $A(x) = \sum_\alpha a_\alpha^\alpha$.
(c) Ist a_n, $n \in \mathbb{Z}$ für $n < n_0 \in \mathbb{Z}$ gleich Null. so erhalten wir eine Laurent-Reihe $A(x) = \sum_{n\geq n_0} a_n x^n$.
(d) Schreibweise: $[x^n]A(x) = a_n$ der Koeffizient von x^n in $A(x)$.
(e) $K[\![x]\!]$ ist eine K-Algebra von formalen Funktionen, auf die man (formal) die üblichen Operationen mit Funktionen anwenden kann: Komposition (= Substitution), Differentiation, Integration, Auswertung in 0, Variablensubstitution. Zudem kann man Indizes verschieben (Shift). Dies erlaubt es, Gesetzmässigkeiten und geschlossene Formen für die Folge zu finden.

Beispiel 1: Ein $2\times n$ Schachbrett werde mit 2×1 Dominosteinen belegt. Wieviele Mglichkeiten gibt es?

Nachrechnen ergibt folgende Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	1	2	3	5	8

und wir vermuten, dass $a_n = F_n$ (Fibonacci Folge). Rekursion:

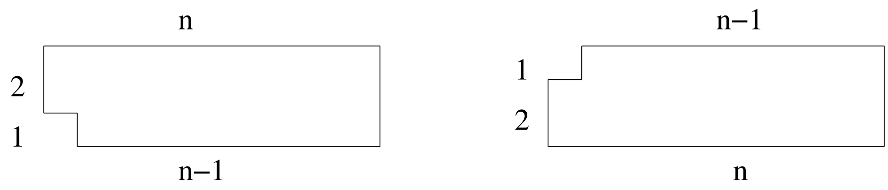
und damit $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ausserdem gilt $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$, also $a_n = F_n$. Erzeugende Funktion: $A(x) = \sum a_n x^n$ mit $A(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ wie bei Fibonacci Folge.

Beispiel 2: Ein $3\times n$ Schachbrett wird mit 2×1 Dominosteinen belegt. Bestimme die Anzahl a_n aller Möglichkeiten.

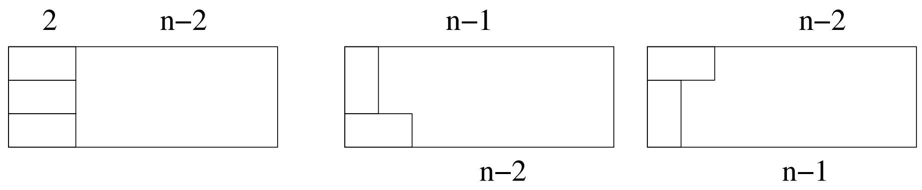
Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4
a_n	1	0	3	0	11

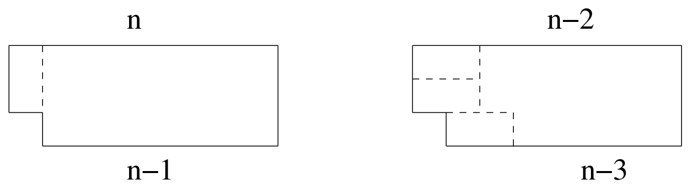
Finde Rekursion für a_n (siehe [GKP, p.325] für graphische Darstellung). Setze $A(x) = \sum a_n x^n$. Betrachte nun Belegungen von



und sei b_n bzw. c_n ihre Anzahl, mit erzeugenden Funktionen $B(x) = \sum b_n x^n$ und $C(x) = \sum c_n x^n$. Durch Ansetzen von 2 bzw. 3 Steinen erhalten wir Rekursion für a_n wie folgt:



also $a_n = a_{n-2} + b_{n-1} + c_{n-1}$. Dies genügt nicht, wir brauchen auch Rekursion für b_{n-1} und c_{n-1}. Aber:



also $b_n = a_{n-1} + b_{n-2}$ und analog aus Symmetriegründen $c_n = a_{n-1} + c_{n-2}$. Schreibe nun $v_n = (a_n\ b_n\ c_n)^T$ und erhalte

$$v_n = E \cdot v_{n-1} + F \cdot v_{n-2}$$

mit

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Sei $V(x) = \sum v_n x^n \in K[\![x]\!]^3$ erzeugende Funktion, so erhalten wird durch Verwenden der Rekursion:

$$\begin{aligned} V(x) = \sum v_n x^n &= \sum_{n \geq 2} (E v_{n-1} + F v_{n-2})\, x^n + v_0 + v_1 x \\ &= \sum v_{n-1} x^n + \sum v_{n-2} x^n + v_0 + v_1 x \\ &= E \cdot \left(\sum_{n \geq 2} v_{n-1} x^{n-1} \right) \cdot x + F \cdot \left(\sum_{n \geq 2} v_{n-2} x^{n-2} \right) x^2 + v_0 + v_1 x \\ &= E\,(V(x) - v_0) \cdot x + F \cdot V(x) \cdot x^2 + v_0 + v_1 x \end{aligned}$$

und damit $(I_3 - Ex - fx^2)V(x) = -Ev_0 x + v_0 + v_1 x$ also $V(x) = (I_3 - Ex - Fx^2)^{-1} \cdot (v_0 + v_1 x - E v_0 x)$. Wegen $v_0 = (1,0,0)^T$ und $v_1 = (0,1,1)^T$ erhalten wir durch Rechnung und wegen $E \cdot v_0 = v_1$ die Reihenentwicklung

$$V(x) = [1 + (Ex + Fx^2) + (Ex + Fx^2)^2 + \ldots] \cdot (1,0,0)^T.$$

PS: Berechne damit die ersten Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Alternative Berechnung mit Potenzreihen in Spalten und Zeilen siehe in [GKP, p. 325-327].

PS: Studiere die Argumentation in [GKP, p. 325–327].

Beispiel 3: Münzenkombinationen [GKP, p. 327 – 330]. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit 1, 2, 5, 10, 20, 50 Cent-Münzen einen gegebenen Cent-Betrag zu erreichen.

1. Fall: Verwende nur 1-Cent Münzen, dann ist die Anzahl $a_n = 1$ für alle $n \geq 0$, also erzeugende Funktion $A^1(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k\geq 0} x^k$.

2. Fall: Verwende nur 1-Cent und 2-Cent Münzen und sei b_n die zugehörige Anzahl. Sei $\tilde{a}_n$ die Anzahl für nur 2-Cent Münzen, mit erzeugenden Funktion $\tilde{A}(x) = A^2(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$. Für die Anzahl b_n gilt:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{a}_{n-k},$$

also ist die erzeugende Funktion von (b_n) gegeben als Produkt:

$$B(x) = \underbrace{A(x)}_{A^1(x)} \cdot \underbrace{\tilde{A}(x)}_{A^2(x)} = \left(\sum_{i\geq 0} x\right) \cdot \left(\sum_{i\geq 0} x^{2i}\right).$$

Sei $Z(x)$ die erzeugende Funktion von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, z_n die Anzahl der Möglichkeiten mit 1, 2, 5, 10, 20, 50 Cent Münzen einen Betrag von n Cent zu erreichen. Dann gilt:

$$Z(x) = A^1(x) \cdot A^2(x) \cdot A^5(x) \cdot A^{10}(x) \cdot A^{20}(x) \cdot A^{50}$$

mit $A^m(x) = \sum_{i\geq 0} x^{m_i} = \frac{1}{1-x^m}$.

Bemerkung: Gibt es Cent-Münzen von jedem Wert k, so ist die zugehörige erzeugende Funktion

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{k\geq 0} p_n x^n$$

wobei $p_n =$ Anzahl der Partitionen von n. Es gilt (Ramanujan):

$$\begin{aligned} p_{2n+4} &\equiv 0 \mod 5, \\ p_{7n+5} &\equiv 0 \mod 7, \\ p_{11n+6} &\equiv 0 \mod 11, \end{aligned}$$

siehe [Andrews].

Wiederholung formale Potenzreihen

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ Vektor von Variablen, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. $A(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$, $B(x) = \sum b_\alpha x^\alpha \in K[\![x]\!]$ formale Potenzreihen über Körper K (Charakteristik $= 0$). Die wesentlichen Operationen in $K[\![x]\!]$ sind:

(1) *Addition:* $C(x) = A(x) + B(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ mit $c_\alpha = a_\alpha + b_\alpha$ komponentenweise.

(2) *Skalarmultiplikation:* $C(x) = \lambda \cdot A(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ mit $c_\alpha = \lambda \cdot a_\alpha$ komponentenweise.

(3) *Multiplikation:* $C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ mit

$$c_\alpha = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^n \\ \gamma \leq_{cp} \alpha}} a_\gamma b_{\alpha-\gamma} = \sum_{\substack{\gamma,\delta \in \mathbb{N}^n \\ \gamma+\delta=\alpha}} a_\gamma b_\delta$$

(sogenannte *Faltung von Folgen*).

(4) *Multiplikative Inversion:* $A(0) = a_0 \neq 0$, weiters sei $C(x) = A(x)^{-1} = \sum c_\alpha x^\alpha$ das Inverse von A. Für $a_0 = 1$: $A(x) = 1 - B(x)$ mit $\mathrm{ord} B(x) = \min\{|\alpha|, b_\alpha \neq 0\} > 0$ gilt: $C(x) = 1 + B(x) + B(x)^2 + \ldots$ wohldefiniert als formale Potenzreihe (siehe Abschnitt über Topologie unten).

(5) *Komposition:* $C(x) = A(B(x))$, mit $B(0) = 0$ ($\mathrm{ord} B > 0$) mit $C(x) = \sum a_\alpha (B(x))^\alpha$ wohldefiniert als formale Potenzreihe.

(6) *Partielle Ableitung:* $A(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$. $\partial_i A(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} A(x) = \sum a_\alpha \alpha_i x^{\alpha - e_i}$, wobei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ Standardbasis von $\mathbb{Z}^n$. Es gilt

$$\partial_x^\beta A(x) = \sum a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} \beta! x^{\alpha-\beta} = \sum a_\alpha \alpha^{\underline{\beta}} x^{\alpha-\beta}$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$, $\beta! = \prod_{i=1}^n \beta_i!$ und $\alpha^{\underline{\beta}} = \alpha_1^{\underline{\beta_1}} \cdots \alpha_n^{\underline{\beta_n}}$.

(7) *Kompositionelle Inversion:* $A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$ Vektor von formalen Potenzreihen, $DA(x) = (\partial_i A_j(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ Funktionalmatrix, $A(0) = 0 \in K^n$. Satz über inverse Funktionen: Es gibt $B(x) =: A(x)^{-1}$ mit $A(B(x)) = B(A(x)) = x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $B(x) = (B_1(x), \ldots, B_n(x))$ Vektor von formalen Potenzreihen, $B(0) = 0 \in K^n$, genau dann wenn $DA(0) = m_n(K)$ eine invertierbare Matrix ist.

Speziell: $n = 1$: $A(x) = \sum_{k \geq 1} a_k x^k$ invertierbar, genau dann wenn $a_1 \neq 0$, also genau dann wenn $A(x)$ einen linearen Bestandteil hat.

Beweis: vgl. PS.

(8) *Shift:* $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $A(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$, $E_\gamma : K[\![x]\!] \to K[\![x]\!]$ Shiftoperator bzgl. γ, $E_\gamma A(x) := \sum a_\alpha x^{\alpha+\gamma}$.
$n = 1$, $\gamma = 1 : E_\gamma =: E$, $E \sum a_k x^k = \sum a_k x^{k+1}$.

(9) *Diskrete Differentiation bzgl. x:* $\partial_i A = E_i A - A$.

(10) *Division:* Sei $<_\varepsilon$ Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$, $A \in K[\![x]\!]$, $A = \sum a_\alpha x^\alpha$, *Initialmonom* $= \mathrm{in} A(x) = a_\alpha x^\alpha$ mit α minimal bzgl. $<_\varepsilon$ in Träger $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^n, a_\alpha \neq 0\}$. Dann hat jedes $R(x) \in K[\![x]\!]$ genau eine Darstellung

$$R(x) = P(x) \cdot A(x) + Q(x)$$

mit $P(x), Q(x) \in K[\![x]\!]$ und Träger $Q \subseteq \mathbb{N}^n \setminus (\alpha + \mathbb{N}^n)$.

Beweis: Adaptiere den euklidischen Divisionsalgorithmus für Polynome auf den Potenzreihenfall.

Speziell: $n = 1, d = \mathrm{ord}\, A(x)$, $a_d x^d$ Initialmonom von $A(x)$, dann $R(x) = P(x) \cdot A(x) + Q(x)$ mit $Q(x)$ Polynom vom Grad $< d$. Damit kann man zeigen: Für $n = 1$ ist $K[\![x]\!]$ Hauptidealring, und jedes Ideal I wird sogar von einem Monom erzeugt, nämlich x^k mit $k = \min\{\mathrm{ord}\, A, A \in I\}$.

(11) *Konvergenz:* $(A_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $K[\![x]\!]$ konvergiert in $K[\![x]\!]$ mit Limes $A(x) \in K[\![x]\!]$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{ord}(A_k - A) = \infty$.

Damit erhält man Topologie auf $K[\![x]\!]$, die x-adische (oder m-adische) Topologie. Sei $m = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in K[\![x]\!]$ das einzige (!) maximale Ideal von $K[\![x]\!]$ (denn $K[\![x]\!] \setminus m = K[\![x]\!]^* =$ invertierbaren Elemente), und

$m^k = \langle x^\alpha, |\alpha| = k \rangle = \{A \in K[\![x]\!], ordA \geq k\}$, so ist m^k Umgebungsbasis der 0 (und entsprechend $A + m^k$ Umgebungsbasis von $A \in K[\![x]\!]$).

Eine Reihe $\sum_{k \geq 0} A_k(x)$ konvergiert in $K[\![x]\!]$ genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty} \mathrm{ord} A_k = \infty$ (betrachte Folge des Partialsummen).

Beispiel: (a) multiplikatives Inverses: Sei $A(x) = 1 - B(x) \ \in K[\![x]\!]$ mit $A_0 = 1$ (also $B_0 = 0$). Dann gilt

$$A^{-1} = (1-B)^{-1} = \frac{1}{1-B} = \underbrace{1 + B + B^2 + \ldots}_{\text{konvergiert in } K[\![x]\!]} \ .$$

(b) Euklidische Division von formalen Potenzreihen: Sei $A \in K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ mit $\mathrm{in}(A) = x^\alpha$ mit α minimal im Träger von A bzgl. einer Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$ (zum Beispiel lexikographische Ordnung). Dann existieren zu jedem $R \in K[\![x]\!]$ eindeutige Potenzreihen $P, Q \in K[\![x]\!]$ mit $\text{Träger}(Q) \subseteq \mathbb{N}^n \setminus (\alpha + \mathbb{N}^n)$ und $R = P \cdot A + Q$.

(c) Satz über inverse Funktionen: vgl. PS.

(12) *Borel Transformation:* $A(x) = \sum a_n x^n$, dann heisst

$$A^*(x) := \sum \frac{a_n}{n!} x^n$$

die *Boreltransformierte von* $A(x)$.

(siehe Abschnitt unten über exponentielle erzeugende Funktionen)

Beispiele von erzeugenden Funktionen:

Gegeben sind eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit zugehöriger EF (erzeugenden Funktion) $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ in einer Variablen [GKP 335].

$a_n = 1: \quad A(x) = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$,

$a_n = (-1)^n: \quad A(x) = \sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$,

$a_n = n+1: \quad A(x) = \sum (n+1) x^n = (\sum x^n)' = \frac{1}{(1-x)^2}$,

$a_n = c^n: \quad A(x) = \sum c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$,

$a_n = \binom{c}{n}: \quad A(x) = \sum_{n\geq 1} \binom{c}{n} x^n = (1+x)^c$,

$a_n = \frac{1}{n}, \ a_0 = 0: \quad A(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \log(\frac{1}{1-x})$,

$a_n = \frac{1}{n!}: \quad A(x) = \sum \frac{1}{n!} x^n = e^x$.

Rekursionen in einer Variablen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K oder in beliebigem Ring, etwa $\mathrm{M}_n(K)$, $d \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_d \in K$ Rekursion:

$$\begin{aligned} &a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_d a_{n-d}, \quad n \geq d,\\ &a_0 \text{ vorgegeben in } K,\\ &.\\ &.\\ &.\\ &a_{d-1} \text{ vorgegeben in } K. \end{aligned}$$

Letztere Bedingungen heissen Anfangsbedingungen. *Ziel:* Finde "geschlossene Form" für das n-te Folgenglied a_n.

Bemerkung: Die Rekursion $a_n = \sum c_i a_{n-i}$ kann auf $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{Z}$ ausgeweitet werden, sofern wir für $n < 0$ $a_n = 0$ setzen und für $n = 0, 1, 2, \ldots, d-1$ Korrekturterme mit Kroneckersymbol hinzufügen, um die Anfangswertbedingung zu erfüllen:

$$a_n = \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i} + \delta_{n0} a_0 + \ldots + \delta_{n\ d-1} a_{d-1} \qquad (*)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ oder $n \in \mathbb{N}$.

Algorithmus zum Lösen" der Rekursion:

Betrachte die erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ und ersetze a_n durch $(*)$,

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-1} x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{d-1} \delta_{ni} a_i x^n.$$

Schreibe nun:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i} x^n &= \sum_{i=1}^{d} c_i \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n-i} x^n \\
&= \sum_{i=1}^{d} c_i \left(\sum_{n=0}^{i-1} a_{n-i} x^n + \sum_{n\geq i} a_{n-i} x^n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} c_i \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{i-1} a_{n-i} x^n}_{=0} + x^i \sum_{n\geq i} a_{n-i} x^{n-i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{d} c_i x^i A(x)
\end{aligned}$$

und erhalte

$$A(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i x^i A(x) + B(x)$$

mit $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{d-1} \delta_{ni} a_i x^n = \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i$ Polynom vom Grad $\leq d-1$. Umformen ergibt:

$$A(x) = \frac{B(x)}{1 - \sum_{i=1}^{d} c_i x^i} = B(x) \cdot (1 + c(x) + c(x)^3 + \dots)$$

mit $c(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i x^i$. Verwende hier entweder geometrische Reihe in $c(x)$ oder Partialbruchzerlegung über $\mathbb{C}$ von $\frac{B(x)}{1-c(x)}$.

Bemerkung: Ist $A(x) = \frac{B(x)}{1-c(x)}$ mit $1 - c(x) = \prod_{k=1}^{m} (1-\alpha_i x)^{d_i}$ und $\alpha_i \in \mathbb{C}$ alle verschieden so ist $a_n = g_1(n)\alpha_1^n + \ldots + g_m(n)\alpha_m^n$ mit $g_i(n)$ Polynom in n vom Grad $d_i - 1$ und mit Leitkoeffizient [GKP, p.341]

$$\frac{B(\frac{1}{\alpha_i})}{(d_i-1)\prod_{j\neq i}(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_i})^{d_j}}.$$

Beweis durch Induktion über $\max(d_1, \ldots, d_m)$.

Beispiel: [GKP, p.341] Betrachte $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ für $n \geq 2$ und $a_0 = a_1 = 1$.

Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	1	1	5	14	23	52	97

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum a_n x^n = \sum_n (a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n + \delta_{n0}) \cdot x^n \\
&= x \sum a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum a_{n-2} x^{n-2} + \sum_{n \geq 2} (-1)^n x^n + 1 \\
&= (x + 2x^2) A(x) + \frac{1}{1+x} + x.
\end{aligned}$$

Daraus:

$$A(x) \cdot (1 - x - 2x^2) = \frac{(1+x)^2 + 1}{1+x} = \frac{1 + x + x^2}{1+x},$$

also:

$$A(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(1+x)^2 (1-2x)}$$

mit $\alpha_1 = 2,\ d_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ d_2 = 2$. Also nach oben:

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + (c_2 n + c_3)(-1)^n.$$

Rechnung liefert $c_1 = \frac{7}{9},\ c_2 = \frac{1}{3},\ c_3 = \frac{2}{9}$ und damit

$$a_n = \frac{7}{9} 2^n + (\frac{1}{3} n + \frac{2}{9})(-1)^n.$$

PS: Bsp. 3 [GKP, p. 343]: Vektorielle Rekursion.
Bsp. 4 [GKP, p. 344]: Geldwechsel.
Bsp. 5 [GKP, p. 346]: $A(x) = \sum n! x^n$.
Bsp. 6 [GKP, p. 348]: Graphentheorie.

Erzeugende Funktionen spezieller Zahlen

[GKP, p.351], [Com],[Rom];

Bernoulli-Zahlen:

$$\sum B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Stirling-Zahlen 2. Art:

$$\sum_n S(n,k) x^n = (x^{-1})^{\overline{-k}} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)},$$

$$\sum_{n,k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = e^{y(e^x - 1)},$$

$$\sum_n S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k.$$

Stirling-Zahlen 1. Art:

$$\begin{aligned}
&\sum_k s(n,k) x^n = x^{\overline{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1), \\
&\sum_n s(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\log(\frac{1}{1-x}))^k, \\
&\sum_{n,k} s(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = \frac{1}{(1-x)^y}.
\end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten:

$$\sum \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} y^k = e^{x+xy}.$$

Euler'sche Zahlen:

$$\sum A(n,k) \frac{x^k}{n!} y^k = \frac{1-y}{e^{(y-1)x} - y}.$$

PS: Faltungen von Folgen: Beweise

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$$

oder

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = (H_n - H_m) \binom{n}{n-m},$$

siehe auch [GKP, p.354].

Exponentielle erzeugende Funktionen [GKP, p.364-471]: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in Körper oder Ring, $\hat{A}(x) = \sum \frac{a_n}{n!} x^n$. Beachte $\hat{A}'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$ ist EEF von $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (Shiftoperator von Folgen). $\hat{A}, \hat{B}$ EEF von (a_n), (b_n), dann $\hat{C} = \hat{A} \cdot \hat{B}$ EEF von (c_n) mit $c_n = \sum \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$, also ist $\left(\frac{c_n}{n!}\right)$ Faltung von $\left(\frac{a_n}{n!}\right)$ und $\left(\frac{b_n}{n!}\right)$.

Beispiel: [GKP, p. 366] Sei $S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m$. Betrachte dazu:

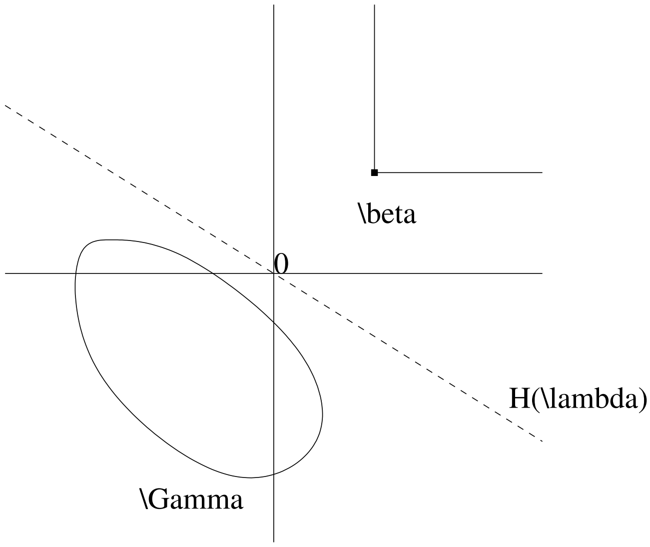
$$\begin{aligned}
S(x) = S_0(x) + S_1(x)x + \ldots &= \sum_{m\in\mathbb{N}} S_m(n) x^m \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} k^m x^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m x^m \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-kx} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - 0} + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} + \ldots + \frac{1}{\frac{1}{x} - n + 1} \right).
\end{aligned}$$

Aber: $\hat{S}(x) = \hat{S}(x,n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{S_m(n)}{m!} x^m = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^m x^m}{m!} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$ und es gilt $S_m(n) = m!$ (m-ter Koeffizient von $\hat{S}(x)$). Aber: $\hat{B}(x) = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{e^x-1}$ mit B_k Bernoulli-Zahlen, also $\hat{S}(x,n) = \hat{B}(x) \cdot \frac{e^{nx}-1}{x} = \left(\sum_k B_k \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_k \frac{n^{k+1} x^k}{(k+1)!}\right)$ und schliesslich: $S_m(n) = \frac{1}{m+1} \left(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)\right)$ mit Bernoulli-Polynomen $B_m(x) = \sum_k \binom{m}{k} B_k x^{m-k}$.

Beispiel: Graphentheorie + EEF: [GKP, p.368].

Höher-dimensionale Rekursionen: [Bousquet-Milou, M. Petkovšek, Linear Recurrences with constant coefficients: the multivariate case. Discrete Mathematics **225** (2000), p. 51–75]. Sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert, $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ eine endliche Teilmenge (von Shifts $\gamma \in \Gamma$), sei $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta + \Gamma \subset \mathbb{N}^n$ und sei $g : \mathbb{N}^n \backslash (\beta + \mathbb{N}^n) \longrightarrow K$ =Körper oder Ring gegeben (Anfangsbedingung), sowie ein Vektor $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in K^Γ. Wir betrachten die Rekursion $(*)$:

$$\begin{aligned}
a_\alpha &= b_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus (\beta + \mathbb{N}^n), \\
a_\alpha &= \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma a_{\alpha+\gamma} \quad \text{für} \quad \alpha \in \beta + \mathbb{N}^n.
\end{aligned}$$



Annahme: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{N}_+^n$ mit $\lambda{\cdot}\gamma = \sum \lambda_i \gamma_i < 0$ für alle $\gamma \in \Gamma$ (also liegt Γ in offenem Halbraum gegeben durch die Hyperebene $H_\lambda = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n; \lambda\alpha = 0\}$. *Behauptung:* Dann hat die Rekursion von zuvor genau eine Lösung $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ und die EF $A(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha$ kann durch nachfolgenden Algorithmus berechnet werden.

Beweis: Sei E_γ der Shiftoperator $E_\gamma(a_\alpha)_\alpha = (a_\alpha + \gamma)_\alpha$ und damit $E_0 = 1$ die Identität. Schreibe (*) als:

$$\Big(1 - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma E_\gamma\Big)(a_\alpha) = 0 \qquad \text{für } \alpha \in \beta + \mathbb{N}^n,$$
$$1 \cdot (a_\alpha) = b_\alpha \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus (\beta + \mathbb{N}^n).$$

Setze nun $E_\lambda a_\alpha = 0$ falls $\alpha + \gamma \notin \mathbb{N}^n$ (oder $a_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \mathbb{N}^n$) sowie $\tilde{b}_\alpha = \Big(1 - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma E_\gamma\Big)(a_\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus (\beta + \mathbb{N}^n)$ und $\tilde{b}_\alpha$ für $\alpha \in \beta + \mathbb{N}^n$. Damit erhalten wir die Rekursion

$$\Big(1 - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma E_\gamma\Big)(a_\alpha) = \tilde{b}_\alpha$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Wegen $c_\gamma < 0$ für $\gamma \in \Gamma$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\Big[1 + \sum_{k\geq 1} \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma E_\gamma\big)^k\Big](\tilde{b}_\alpha)$$

für jedes α (da nilpotent). Wir erhalten

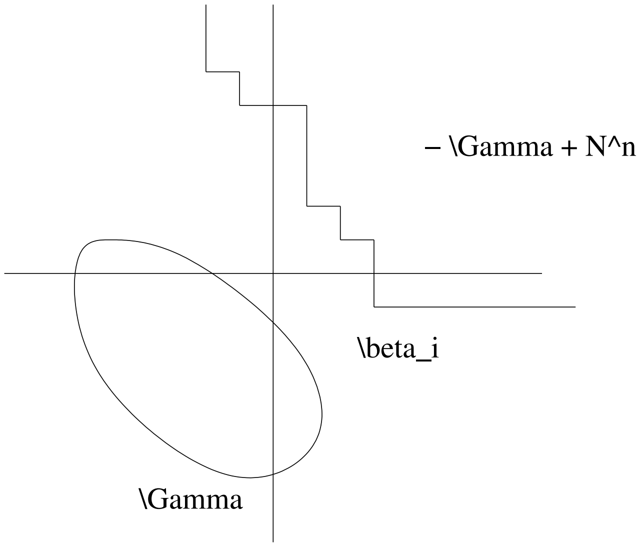
$$a_\alpha = \Big[\sum_{k\geq 0} \big(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma E_\gamma\big)^k\Big]\tilde{b}_\alpha$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Bemerkung: Statt $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta + \Gamma \subset \mathbb{N}^n$ sollte man $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{Z}^n$ so wählen, dass $\beta_1, \dots, \beta_k$ minimal mit

$$-\Gamma + \mathbb{N}^n = \cup_{i=1}^k \beta_i + \mathbb{N}^n,$$

also β_i die komponentenweise minimalen Elemente von $-\Gamma + \mathbb{N}^n$.



Ausgedrückt durch EF: $A(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha x^\alpha$, $B(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \tilde{b}_\alpha x^\alpha$, so setze

$$S(x) = 1 - \sum_\gamma c_\gamma x^{-\gamma} = x^{-\beta}\left(\underbrace{x^\beta - \sum c_\gamma x^{\beta-\gamma}}_{=:\tilde{S}(x)}\right)$$

mit $\tilde{S}(x)$ Polynom. Dann gilt $S(x)\cdot A(x) = A(x) - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha x^{\alpha-\gamma} = A(x) - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_{\alpha+\gamma} x^\alpha$ und damit ist (*) äquivalent zu:

$$S(x)\cdot A(x) = B(x)$$

in $K((x))$ (= Laurentreihen) oder

$$A(x) = S^{-1}(x)\cdot B(x)$$

Multiplikation mit x^β liefert:

$$\tilde{S}(x)\cdot A(x) = B(x)\cdot x^\beta$$

in $K[\![x]\!]$. Also ist $A(x)$ der Quotient der Division von $B(x)\cdot x^\beta$ durch die Potenzreihe $\tilde{S}(x)$ mit Initialmonom x^β ($\tilde{S}(x)$ ist zwar Polynom, wird aber als Potenzreihe betrachtet).

Kapitel V: Summation von hypergeometrischen Reihen

A. Hypergeometrische Reihen ([GKP, p.205-256], [A=B, p. 33-119])

Definition: $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k x^k \in K[\![x]\!]$ formale Potenzreihe in einer Variablen, K Ring oder Körper, heisst *hypergeometrische Reihe* oder *Funktion*, und $c_k x^k$ heisst *hypergeometrische Term*, wenn

$$c_0 = 1$$
$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{P(k)}{Q(k)}$$

rationale Funktion ist mit P, Q Polynome in einer Variablen über K.

Satz 1: $S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k x^k \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ hypergeometrisch $\iff \exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und $\exists b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, $b_i \notin -\mathbb{N}$ mit

$$c_k = \frac{a_1^{\overline{k}} \dots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \dots b_n^{\overline{k}}} \cdot \frac{1}{k!}$$

(wohldefiniert, da $b_i \notin -\mathbb{N}$), wobei $a^{\overline{k}} = a(a+1)\cdots(a+k-1)$, $a^{\overline{0}}$, $0! = 1$.
Beweis: $\Leftarrow$: $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(a_1+k)\cdots(a_m+k)}{(b_1+k)\cdots(b_n+k)(k+1)}$ rationale Funktion in k, und $c_0 = 1$.
$\Rightarrow$: $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{P(k)}{Q(k)}$ rationale Funktion in k. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt: $\exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$; $\exists b_1, \dots, b_n \notin -\mathbb{N}$ mit $P(k) = (a_1+k)\dots(a_m+k)$ und $Q(k) = (b_1+k)\dots(b_n+k)(1+k)$ (evtl. nach Erweitern von $\frac{P}{Q}$ mit $(1+k)$) und die Leitkoeffizienten von P und Q können gleich 1 gesetzt werden durch Inkorporation des Faktors in x.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} F(a,b,x) &= F(a_1,\dots,a_m|b_1,\dots,b_n;x) = F(a_1,\dots,a_m;b_1,\dots,b_n;x) \\ &= {}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1 \dots a_m \\ b_1 \dots b_n \end{matrix}\Big| x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{k}} \cdots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \cdots b_n^{\overline{k}}} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

.

Beispiele: (1) $F(\infty,\infty,x) = F(\,|\,|x) = F(1|1|x) = F(a|a|x) = \sum_k \frac{x^k}{k!} = e^x$.
(2) $F(a_1,\dots,a_m|b_1,\dots,b_n|x) = F(a_1,\dots,a_m,a|b_1,\dots,b_n,a|x)$.
(3) $F(1,1|1|x) = \sum_k \frac{1^{\overline{k}}}{k!} x^k = \sum_k \frac{k!}{k!} x^k = \sum_k x^k = \frac{1}{1-x}$.
(3') $F(a,1|1|x) = \sum \frac{a^{\overline{k}}}{k!} x^k = \sum \binom{a+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^a}$.
(3") $F(-a,1|1|-x) = (1+x)^a = \sum_k \binom{a}{k} x^k$ mit binomischen Lehrsatz (Verwende $\binom{-a+k-1}{k} = (-1)^k \binom{a}{k}$ [GKP, p.174] obere Negation).
(4) $F(1|b,1|x) = \sum_k \frac{(b-1)!}{(b-1+k)!} \frac{x^k}{k!}$ modifizierte Besselfunktion.
(5) $F(a,b|c|x) = \sum_k \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}}} \cdot \frac{x^k}{k!}$ Gauss'sche hypergeom. Reihe (1812). Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x(1-x)F''(x) + (c - x(a+b+1))F(x) - abF(x) = 0,$$

$$F(0) = 1, \qquad F'(0) = 1.$$

Speziell: $F(1,1|2|-x) = \sum \frac{k!k!}{(k+1)!}\frac{(-x)^k}{k!} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} \pm \dots = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(6) $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{k^2+7k+10}{4k^2+1} = \frac{(k+2)(k+5)(k+1)}{(k+\frac{i}{2})(k-\frac{i}{2})(k+1)} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_k c_k = c_0 F(2,5,1|\frac{i}{2},-\frac{i}{2}|\frac{1}{4})$.

(7) $\sum_{k=0}^n \binom{y+k}{k} = \binom{y+n+1}{n}$ (Beweis per Induktion über n). Interpretation als hypergeom. Reihe ($y \in \mathbb{Z}$).

$$\sum_{k=0}^n \binom{y+k}{k} = \sum_{k\geq 0}\binom{y+n-k}{n-k} = \sum_k \frac{(y+n-k)!}{y!(n-k)1} = \sum c_k,$$

$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+1)(k-n)}{(k-n-y)(k+1)} \cdot 1$ und $c_0 = \binom{y+n}{n}$, also ist die obige Identität äquivalent zu

$$\binom{y+n}{n} \cdot F(1,-n|-n-y|1) = \binom{y+n+1}{n}.$$

(8) $\sum_{k\geq 0} c_k := \sum_{k\leq n}\binom{y}{k}(-1)^k = (-1)^k\binom{y-1}{n}$ $y, n \in \mathbb{Z}$, wobei im ersten Schritt k durch $n-k$ ersetzt wurde.
$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+1)(k-m)}{(k-m+y+1)(k+1)} \cdot 1$ und somit $F(1,-m|-m+y+1|1) = (-1)^n\binom{y-1}{n}$.
Bemerkung: Für $y \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ ist $y!$ definiert durch $y! = \Gamma(y+1)$. Damit können wir setzen:

$$y^{\underline{k}} = \frac{y!}{(y-k)!}, \quad y^{\overline{k}} = \frac{(y+k-1)!}{(y-1)!}$$

wobei für Pole der Gammafunktion entsprechende Grenzwerte verwendet werden müssen. Für $y, z \in \mathbb{C}$ beliebig gilt dann:

$$\binom{y}{z} = \lim_{u\to y}\lim_{w\to z}\frac{u!}{w!(u-w)!}.$$

(9) Vandermonde-Identität: $\sum_k \binom{y}{k}\binom{z}{n-k} = \binom{y+z}{n} \qquad n \in \mathbb{Z}$.
$\sum_k \binom{y}{k}\binom{z}{n-k} = \sum_k c_k$ mit $c_k = \frac{y!}{(y-k)!k!} \cdot \frac{z!}{(z-n+k)!(n-k)!}$
und damit $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{k-y}{k+1} \cdot \frac{k-n}{k+z-n+1}$. Ergibt also die Identität

$$(*) \qquad \binom{z}{n} F(-y,-n|z-n+1|1) = \binom{y+z}{n}.$$

Damit lässt sich allgemein $F(a,-n|c|1)$ für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen: Aus (∗) folgt [GKP, p.212]

$$F(a,b|c|1) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad \text{für } b \notin -\mathbb{N}.$$

Es genügt sogar $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b)$ für die Konvergenz der Reihe (bewiesen von Gauss).
Für $b = -n \in -\mathbb{N}$ ergibt sich:

$$F(a,-n|c|1) = \frac{(c-a)^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}} = \frac{(a-c)^{\underline{n}}}{(-c)^{\underline{n}}}.$$

PS: Löse die Aufgaben 1, 2, 3, 4 und 6 aus [GKP 175-183] durch hypergeometrischen Ansatz wie in [GKP, p. 212-214].

Satz 2: *Es gelten die folgenden Identitäten: [GKP, p.214] [A=B, p.42]*
(1)

$$F(a,b|1+b-a|-1) = \frac{(b/2)!}{b!}(b-a)^{\underline{b/2}}, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

(Kummer 1836).

(2)

$$F(1-a-2n, 1b2n, -2n|a,b|1) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(a+b+2n-1)^{\overline{n}}}{a^{\overline{n}} b^{\overline{n}}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(trigonometrische Identität 5.29, [GKP, p.171]).

(3)

$$F(a,b,-n|c,a+b-c-n|1) = \frac{(c-a)^{\overline{n}}(c-b)^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}(c-a-b)^{\overline{n}}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Durch spätere Computer-Algorithmen.

PS: Weitere Beispiele von hypergeometrischen Reihen siehe in [A=B, p. 37-39].

Satz 3 (Spiegelungsprinzip, Pfaff 1797):

$$\frac{1}{(1-x)^a} F(a,b|c|\frac{-x}{1-x}) = F(a, c-b|c|x).$$

Ohne Beweis; versuche mit Maple die Identität zu verifizieren.

Satz 4 (Differentiation): *Sei* $F = F(a_1, \ldots, a_m|b_1, \ldots, b_n|x)$ *und* $\partial = \frac{d}{dx}, \delta = x\partial = x\frac{d}{dx}$*. Dann gilt: [GKP, p.219]*

(1) $\partial F(a_1, \ldots, a_m|b_1, \ldots, b_n|x) = \frac{a_1 \cdots a_m}{b_1 \cdots b_n} F(a_1+1, \ldots, a_m+1|b_1+1, \ldots, b_n+1|x)$,

(2) $(\delta + a_1)F(a_1, \ldots, a_m|b_1, \ldots, b_n|x) = a_1 F(a_1+1, a_2, \ldots, a_m|b_1, \ldots, b_n|x)$,

(3) $(\delta + b_1 - 1)F(a_1, \ldots, a_m|b_1, \ldots, b_n|x) = (b_1 - 1) \cdot F(a_1, \ldots, a_m|b_1 - 1, b_2, \ldots, b_n|x)$,

(4) $\partial(\delta + b_1 - 1) \cdots (\delta + b_n - 1)F = (\delta + a_1) \cdots (\delta + a_m)F$.

Beweis. (1)-(3): Nachrechnen, (4) folgt aus (1)-(3).

Beispiel *Gauss'sche hypergeometrische Reihe*: $F = F(a,b|c|x)$, so gilt nach (4):
$\partial(\delta + c - 1)F = (\delta + a)(\delta + b)F$, also
$x(1-x)F''(x) + (c - x(a+b+1))F'(x) - abF(x) = 0$.

Definition: ([A=B, p.64] oder allgemeiner [WZ, p.585]) $c(n,k)$ heisst *eigentlicher (hypergeometrischer) Term* $\Longleftrightarrow$

$$c(n,k) = P(n,k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{p}(a_i n + b_i k + r_i)!}{\prod_{j=1}^{q}(c_j n + d_j k + s_j)!} x^n y^k, \quad p, q \geq 1$$

mit $a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathbb{Z}$ und $r_i, s_j \in \mathbb{C}$, sowie $P(n,k) \in \mathbb{C}[n,k]$ Polynom.

$c(n,k)$ ist wohldefiniert, falls $a_i n + b_i k + r_i \notin -\mathbb{N}_{>0}$.

Ziele:

(1) Summiere $\sum_k F(n,k)$ mit $F(n,k)$ hypergeometrisch in n und k. $\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}$ und $\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$ sind rationale Funktionen in n und k.
Oder finde Rekursion für $f(n) = \sum_k F(n,k)$ durch k-freie Rekursion $\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij}(n) \cdot F(n-i, k-j) = 0$. (Algorithmus von Fasenmyer)

(2) Sei $S = \sum_k c_k$ hypergeometrische Reihe ($x = 1$) und $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Gibt es einen hypergeometrischen Term z_n mit $s_n = z_{n+1} - z_n$? (Gosper-Algorithmus)

(3) Sei $f(n) = \sum_k F(n,k)$ mit $F(n,k)$ hypergeometrisch. Gibt es einen hypergeometrischen Term $G(n,k)$ mit $F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$. (Zeilberger-Algorithmus)
(oder allgemeinere k-freie Linearkombinationen $\sum a_i(n)F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$).

B. Fasenmyer Algorithmus

Gegeben sei $F(n,k)$ hypergeometrischer Term, $n,k \in \mathbb{N}$, und $f(n) = \sum_k F(n,k)$.

Ziel: Finde Rekursion für $f(n)$.

1. Schritt: Finde lineare Rekursion für $F(n,k)$ mit Koeffizienten, die unabhängig von k sind. Genauer: Bestimme $I, J \subseteq \mathbb{N}$ endlich (meistens $I = \{0,\dots,i_0\}$, $J = \{0,\dots,,j_0\}$) und $a_{ij}(n) \in \mathbb{C}$ für $i \in I$, $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}(n)F(n-i,k-j) = 0 \quad \forall n, \forall k. \qquad (*)$$

Beispiele: (1) $F(n,k) = \frac{k\cdot n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $I = \{0,1\}$, $J = \{0,1\}$.
MAPLE (mit EKHAT, vgl. [A=B, p.59]): *celine*$((n,k) \longrightarrow k{*}n!/(k!{*}(n-k)!),1,1)$ ergibt bis auf konstanten Faktor

$$n\cdot F(n-1,k) - (n-1)\cdot F(n,k) + F(n-1,k-1)\cdot n = 0.$$

(2) $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$ liefert [A=B, p.60]

$$n\cdot\binom{n}{k}^2 - (2n-1)\cdot[\binom{n-1}{k}^2 + \binom{n-1}{k-1}^2] + (n-1)\cdot[\binom{n-2}{k}^2 - 2\cdot\binom{n-2}{k-1}^2 + \binom{n-2}{k-2}^2] = 0$$

2. Schritt: Summiere die Rekursion (*) über alle k und erhalte Rekursion mit polynomialen Koeffizienten für $f(n) = \sum_k F(n,k)$. Versuche diese dann mit diversen Methoden zu lösen.

Beispiel: (vgl. Beispiel (2) von vorher) Die Rekursion für $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$ liefert durch Summation für $f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ [A=B, p.60]

$$n\cdot f(n) - (2n-1)\cdot[f(n-1) + f(n-1)] + (n-1)\cdot[f(n-2) - 2\cdot f(n-2) + f(n-2)] = 0,$$

also

$$f(n) = \frac{2(2n-1)}{n}f(n-1) \quad \text{oder} \quad f(n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

PS: Versuche mit dem Programm "celine" eine Rekursion für $F(n,k) = \binom{n}{k}^3$ oder $\binom{n}{k}^m$ zu finden. (Komplexität des Algorithmus ist zu gross ab etwa $m = 2$).

Bemerkungen: (a) Unter *Mathematica* ist zuerst *DiscreteMath'RSolve'* einzulesen, um dann *FactorialSimplify* zu finden. Vgl. Beispiel in [A=B, p.61].
(b) Weitere Beispiele in [A=B, p.61] und [A=B, p.63].
(c) Fasenmyer's Algorithmus greift nur für *eigentliche* hypergeometrische Terme.

Beispiele: (von eigentlichen hypergeometrischen Termen) (1) $F(n,k) = 2^k\cdot\binom{n}{k} = 2^k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$ eigentlich.
(2) $F(n,k) = \frac{1}{n+3k+1} = \frac{(n+3k)!}{(n+3k+1)!}$ eigentlich.

(3) $F(n,k) = \frac{1}{n^2+k^2+1}$ nicht eigentlich (!) [A=B, p.65].

Satz 4 (Fasenmyer 1945): *Sei $F(n,k)$ eigentlicher Term, $n,k \in \mathbb{N}$. Dann existieren $I = \{0,\ldots,i_0\}, J = \{0,\ldots,j_0\} \subseteq \mathbb{N}$ und Polynome $a_{ij}(n)$, nicht alle 0, mit*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}(n)F(n-i,k-j) = 0$$

für alle $n,k \in \mathbb{N}$ für die $F(n,k) \neq 0$ und für die $F(n-i,k-j)$ wohldefiniert sind. Eine solche Rekursion existiert speziell für

$$i_0 = |b| + |d|, \qquad j_0 = 1 + deg(P) + i_0(|a| + |c| - 1)$$

wobei

$$F(n,k) = P(n,k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{p}(a_i n + b_i k + r_i)!}{\prod_{j=1}^{q}(c_j n + d_j k + s_j)!} \cdot x^n y^k$$

und $b = (b_1,\ldots,b_p)$, $c = (c_1,\ldots,c_q)$, $r = (r_1,\ldots,r_p)$, $a = (a_1,\ldots,a_p)$, $d = (d_1,\ldots,d_q)$, $s = (s_1,\ldots,s_q)$, $|a| = |a_1| + \cdots + |a_p|$.

Bemerkung: Mit Satz 4 zeigt man, dass ein eigentlicher hypergeometrischer Term holonom im Sinne von Bernstein ist, vgl. [Abramov-Petkovšek], [Zeilberger 1991, p. 196] oder [Lipschitz 1989].

Satz 4': *Sei $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ein Vektor von Variablen, $P \in \mathbb{C}[x]$ Polynom, $R_i, S_j \in \mathbb{Z}[x]$ lineare Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, $i = 1,\ldots,r, j = 1,\ldots,s$. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ eine Konstante. Betrachte den eigentlichen hypergeometrischen Term*

$$F(\alpha) = P(\alpha) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r} R_i(\alpha)!}{\prod_{j=1}^{s} S_j(\alpha)!} \cdot z^\alpha$$

für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Dann existieren ein Quader $\Gamma = \prod_{k=1}^{n}[0,\delta_k] \subseteq \mathbb{N}^n$ und Polynome $a_\gamma(x_1) \in \mathbb{C}[x_1]$ in einer Variablen, $\gamma \in \Gamma$, nicht alle Null, sodass die Rekursion

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\alpha_1) \cdot F(\alpha - \gamma) = 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ erfüllt ist für die $F(\alpha) \neq 0$ und $F(\alpha - \gamma)$ wohldefiniert für alle $\gamma \in \Gamma$.

Zudem existiert eine explizite Schranke für die Grösse von Γ, abhängig von P, R_i, S_j, z, ab der die Existenz der Koeffizienten a_γ gewährleistet ist.

Bemerkungen: (a) Schranken analog zu denen von Satz 4 finden sich in der Literatur. Diese sind aus Komplexitätsgründen oft ungenügend, vgl. [A=B, p. 60, p. 106].

(b) Abramov-Petkovšek beweisen, dass ein hypergeometrischer Term genau dann zu einem eigentlichen Term konjugiert ist (d.h. der Quotient $\frac{F(\alpha+e_i)}{F(\alpha)}$ hat die Gestalt wie der Quotient von eigentlichen Termen, für alle $i = 1,\ldots,n$), wenn F holonom ist. [Abramov-Petkovšek: On the structure of multivariate hypergeometric terms, Adv. Appl. Math. **29** (2002), p. 386-411], vgl. auch [WZ, p.585], wo dies vermutet wird.

Beweis: **Idee:** Die Bedingungen an die a_γ sind lineare Gleichungen, deren Anzahl langsamer wächst als die Anzahl der a_γ's, wenn Γ vergrössert wird. (Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen besitzt eine nichttriviale Lösung.)

(a) Wir suchen eine Rekursion der Form

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\alpha_1) \cdot F(\alpha - \gamma) = 0.$$

Division durch $F(\alpha) \neq 0$ liefert

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma(\alpha_1) \cdot \frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)} = 0.$$

Die Quotienten $\frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)}$ sind rationale Funktionen in α. Die Grade der auftretenden Polynome werden durch lineare Funktionen in der Grösse von Γ beschränkt. Der erste Faktor $\frac{P(\alpha-\gamma)}{P(\alpha)}$ ist klarerweise rational in α mit Grad von P unabhängig von Γ. Der letzte Faktor $\frac{z^{\alpha-\gamma}}{z^\alpha} = \frac{1}{z^\gamma}$ ist eine Konstante (in α). Betrachte also einen Quotienten $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!}$ für ein lineares Polynom $R \in \mathbb{Z}[x]$.

Beispiel: $R(\alpha,\beta) = 2\alpha - 3\beta + 7$, $\gamma = (2,3)$: $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!} = \frac{(2(\alpha-2)-3(\beta-3)+7)!}{(2\alpha-3\beta+7)!}$.

Der Quotient $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!}$ ist wohldefiniert, wenn $R(\alpha)$ und $R(\alpha-\gamma) \notin -\mathbb{N}$ sind.

Beachte: $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha) \in \mathbb{Z}$ (auch wenn der konstante Term in $\mathbb{C}$ liegt), also erhalten wir für $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha) \geq 0$ das Produkt $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!} = R(\alpha-\gamma) \cdot (R(\alpha-\gamma)-1) \cdots (R(\alpha)+1)$ von linearen Polynomen in α mit $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha)$ vielen Faktoren. Für $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha) < 0$ erhalten wir $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!} = [R(\alpha) \cdot (R(\alpha) - 1) \cdots (R(\alpha-\gamma)+1)]^{-1}$ mit ebenso vielen Faktoren. Wegen R linear, ist $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha)$ linear in γ und unabhängig von α. Daraus folgt, dass der zweite Faktor $\frac{\prod R_i(\alpha-\gamma)! \prod S_j(\alpha)!}{\prod R_i(alpha)! \prod S_j(\alpha-\gamma)!}$ von $\frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)}$ ein Quotient von Polynomen in α ist, deren Grad durch eine lineare (explizit berechenbare) Funktion in γ gegeben ist.

(b) Wandle $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\alpha) \cdot \frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)} = 0$ in eine lineare Gleichung in $a_\gamma(\alpha)$ mit polynomialen Koeffizienten um, indem mit dem kgV der Nenner erweitert wird.

Das kgV der in allen $\frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)}$ auftretenden Nenner ist ein Polynom in α, dessen Grad linear in der Grösse von Γ ist: Das lineare Polynom $R(\alpha-\gamma) - R(\alpha)$ nimmt sein Maximum und Minimum in den Ecken des Quaders $\Gamma = \prod_{k=1}^n [0, \delta_k]$ an. Ist etwa $\overline{\gamma} \in \Gamma$ mit $R(\alpha - \overline{\gamma}) - R(\alpha) = \max_{\gamma\in\Gamma}(R(\alpha-\gamma) - R(\alpha)) \geq 0$, so teilt für jedess $\gamma \in \Gamma$ das Polynom $\frac{R(\alpha-\gamma)!}{R(\alpha)!}$ das Polynom $\frac{R(\alpha-\overline{\gamma})!}{R(\alpha)!}$, und analog für das Minimum. Dies zeigt, dass die Nenner von $\frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)}$ für $\gamma \in \Gamma$ für jeden Faktor R_i oder S_j ein Polynom in α vom Grad $R_i(\alpha - \overline{\gamma_i}) - R_i(\alpha)$ bzw. $S_j(\alpha - \overline{\delta_j}) - S_j(\alpha)$ für geeignete $\overline{\gamma_i}$, $\overline{\delta_j} \in \Gamma$ teilen. Also ist das kgV dieser Nenner ein Polynom in α, dessen Grad linear in der Grösse $|\Gamma|$ von Γ ist, $|\Gamma| := \sup\{\delta_k\}$.

(c) Nach Multiplikation von $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\alpha_1) \cdot \frac{F(\alpha-\gamma)}{F(\alpha)} = 0$ mit dem kgV der Nenner ergibt eine Gleichung der Gestalt

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\alpha_1) \cdot G_\gamma(\alpha) = 0,$$

wobei $G_\gamma(\alpha)$ nach (a) und (b) ein Polynom in α vom Grad linear in Γ ist, d.h. $\deg(G_\gamma(\alpha)) \leq c \cdot |\Gamma|$.

Wir entwickeln $G_\gamma(\alpha)$ nach Monomen in $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mit Koeffizienten Polynome in α_1 mal die unbekannten $a_\gamma(\alpha_1)$. Die Anzahl dieser Monome in $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist $\leq \binom{n-1+c|\Gamma|}{n-1} =: e$. Koeffizientevergleich liefert also lineare Gleichungen an die $a_\gamma(\alpha_1)$, und zwar höchstens e viele.

Die Anzahl der $a_\gamma(\alpha_1)$ ist aber $\#\Gamma = \prod_{k=1}^n (\delta_k + 1)$ und damit ("ungefähr) ein Polynom vom Grad n in den Seitenlängen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ von Γ.

Für wachsendes Γ (o.B.d.A. $\Gamma = \prod_{k=1}^n [0, \delta]$ Würfel) überschreitet irgendwann die Anzahl der $a_\gamma(\alpha_1)$ die Anzahl der Gleichungen, und damit existiert dann eine nichttriviale Lösung $a_\gamma(\alpha_1)$ für Γ hinreichend gross.

Bemerkung: Allgemeine hinreichende Grösse von Γ siehe in [A=B].

Bemerkung: Alternativer Beweis für die Rekursion von Satz 4 (in 2 Variablen) [Zeilberger, Discrete Math. **80** (1990)]. Es sei

$$F(\underbrace{n}_{\alpha_1}, \underbrace{k}_{\alpha_2}) = P(n,k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^r R_i(n,k)!}{\prod_{j=1}^s S_j(n,k)!} w^n z^k$$

eigentlicher hypergeometrischer Term mit Konstanten $w, z \in \mathbb{C}$, Polynom $P(n,k)$ und linearen Polynomen $R_i, S_j \in \mathbb{Z}[x,y]$. Schreibe

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{A(n,k)}{B(n,k)} \quad , \qquad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = \frac{A'(n,k)}{B'(n,k)}$$

mit Polynomen $A, B, A', B' \in \mathbb{C}[x,y]$. Es bezeichne $\S_n$ und $\S_k$ die elementaren Shiftoperator induziert durch $n \to n{+}1$, $k \to k{+}1$, also $\S_n f(n,k) = f(n{+}1,k), \S_k f(n,k) = f(n,k{+}1)$. Setze $L = B{\cdot}\S_n{-}A$, $L' = B'{\cdot}S_k{-}A'$, polynomiale Shiftoperatoren. L und L' haben polynomiale Koeffizienten, die von n und k abhängen, wir wollen aber eine k-freie Rekursion für F.

Erinnerung: Für $p(x,y),\ q(x,y) \in K[x,y]$ existieren $r,\ s \in K[x,y]$, sodass $r(x,y) \cdot p(x,y) + s(x,y) \cdot q(x,y) = t(x)$ gilt: Sei $I = \langle p, q \rangle$ Ideal. Wähle geeignete lexikographische Ordnung und konstruiere eine Gröbnerbasis von I. Dann ist diese Gröbnerbasis geschnitten mit $K[x]$ eine Gröbnerbasis von $I \cap K[x]$ (vgl. [Z, p.208; Cartier, p. 66-68]).

Hier: Es existiert eine Linearkombination M von L und L' über $\mathbb{C}[x,y,S_x,S_y]$ in der das y nicht auftaucht, also $M \in \mathbb{C}[x, S_x, S_y]$.

Es folgt sofort aus $LF = L'F = 0$, dass $MF = 0$. Schreibe nun $M = N - (S_k - 1)\tilde{M}$ mit $N \in \mathbb{C}[x, S_n]$ (mit Division von M durch $S_k - 1$). Dann folgt

$$NF = (S_k - 1)\tilde{M}F$$

und $\tilde{M}F$ ist ein hypergeometrischer Term $G = G(n,k)$.
Damit erhalten wir

$$N(n, S_n)F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

wie gewünscht. Noch zu zeigen: $N(n, S_n)$ ist nicht identisch Null. Dies zeigt man wie die analoge Aussage im Satz 9 unten.

Bemerkung: Die Elimination von k (bzw. $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$) aus den Koeffizienten ist aufwendig und verlangsamt den Algorithmus.

Maple: Verwende im Zusatzpaket *EKHAD* den Befehl *celine*.
PS: $F(n,k) = \binom{n}{k}^q,\ q \in \mathbb{N}$: *celine*$((n,k)- > \mathit{binomial}(n,k)^q, j_0, i_0)$.

Bemerkung: Unser ursprüngliches Problem war eine geschlossene Form für die Summe $\sum_k F(n,k) = f(n)$ zu finden. Anstatt "direkt" zu summieren, suchen wir eine polynomiale Rekursion für $f(n)$. Wir finden diese durch eine k-freie Rekursion an die Summanden $F(n,k)$.

Beispiel: $F(n,k) = (n+k)!$, also $F(n,k) = (n+k)!$. Gesucht ist eine k-freie Rekursion an die $F(n,k)$. Aber:

$aF(n,k) + bF(n+1,k) + cF(n,k+1) + dF(n+1,k+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow$

$a + b\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0 \quad \Longleftrightarrow$

$a + b\frac{(n+1+k)!}{(n+k)!} + c\frac{(n+k+1)!}{(n+k)!} + d\frac{(n+1+k+1)!}{(n+k)!} = 0 \quad \Longleftrightarrow$

$a + b(n+k+1) + c(n+k+1) + d(n+k+2)(n+k+1) = 0$

$[a(n){+}b(n)(n{+}1){+}c(n)(n{+}1){+}d(n)(n{+}2)(n{+}1)]{\cdot}k^0{+}[b(n){+}c(n){+}d(n)((n{+}1){+}(n{+}2))]{\cdot}k^1{+}d(n){\cdot}k^2 = 0.$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a + (n+1)b + (n+1)c + (n^2 + 3n + 2)d = 0,$$

$$b + c + (2n+3)d = 0,$$

$$d = 0.$$

Also: $d = 0,\ c = -b,\ a = 0$

Wir erhalten daher folgende Rekursion: $F(n+1,k) - F(n,k+1) = 0$.

Bemerkung: Die Konstruktion der k-freien Rekursion aus Satz 4 liefert (zumindest theoretisch) ein Verfahren, um kombinatorische Identitäten zu beweisen. Sei $F(n,k)$ wie im Satz und $f(n,k) = sum_k F(n,k)$. Wir wollen zeigen, dass die Identität

$$f(n) = h(n)$$

für ein gegebenes hypergeometrisches $h(n)$ von der Form

$$h(n) = C \cdot \frac{\prod_{i=1}^{u} U_i(n)!}{\prod_{j=1}^{v} V_j(n)!} \cdot t^n$$

mit $C,\ t \in \mathbb{C}$ und linearen Polynomen $U_i, V_j \in \mathbb{Z}[x]$. Statt dessen könnte H auch durch eine lineare Rekursion mit polynomialen Koeffizienten und von minimaler Ordnung gegeben sein, etwa $O(n, S_n) \in \mathbb{C}[x, S_n]$. Wir wissen also

$$N(n, S_n) f(n) = 0 \quad , \quad O(n, S_n) h(n) = 0.$$

Dividiere N durch O nach euklidischem (nicht kommutativem) Algorithmus und erhalte Rest $R(n, S_n) \in \mathbb{C}[x, S_n]$. Gilt $f(n) = h(n)$, dann $R(n, S_n) \equiv 0$, da $O(n, S_n)$ von minimalem Grad, und $\deg(R(n, S_n)) < \deg(O(n, S_n))$. Ist umgekehrt $R(n, S_n) \equiv 0$, dann ist $N(n, S_n)$ ein Vielfaches von $O(n, S_n)$. Es folgt, dass $O(n, S_n) f(n) = 0$. Sind nämlich genügend viele Anfangswerte von $O(n, S_n) f(n)$ gleich 0, dann ist bereits $O(n, S_n) f(n) = 0$. Es folgt sofort $f(n) = h(n)$, sofern genügend viele Anfangswerte von f und h übereinstimmen.

Bemerkung: Zeilberger's Idee zur Beschleunigung des Algorithmus ist es, Kandidaten für den polynomialen Shiftoperator unbestimmt anzusetzen, nach steigender Ordnung, als Vielfaches von $O(n, S_n)$.

1. Schritt: Teste mit Gosper-Algorithmus in 2 Variablen, ob

$$O(n, S_n) \cdot F(n,k) = G(n, k+1) - G(n,k)$$

für einen hypergeometrischen Term $G(n,k)$. Wenn ja, summiere über k und erhalte $O(n, S_n) f(n) = 0$, also $f(n) = h(n)$ falls AW übereinstimmen. Wenn kein $G(n,k)$ existiert (das ist mit Gosper-Algorithmus feststellbar), dann:

2. Schritt: Teste mit Gosper-Algorithmus in 2 Variablen, ob

$$(b_1(n) S_n + b_0(n)) \cdot O(n, S_n) \cdot F(n,k) = G(n, k+1) - G(n,k)$$

für einen hypergeometrischen Term $G(n,k)$. Wenn ja, summiere über k und erhalte

$$(b_1(n) S_n + b_0(n)) \cdot O(n, S_n) f(n) = 0.$$

Schliesse dann wie oben. Wenn nein, gehe über zum

3. Schritt: Suche

$$(b_2(n) S_n^2 + b_1(n) S_n + b_0(n)) \cdot O(n, S_n) F(n,k) = G(n, k+1) - G(n,k),$$

wobei jeweils $b_i(n)$ unbestimmte Polynome sind, die durch den Gosper-Algorithmus bestimmt werden können (als Lösung eines linearen Gleichungssystems), sofern $G(n,k)$ existiert.

C. Gosper's Algorithmus

[GKP, p. 223-256], [A=B, p. 73-100], [Gathen-Gerhard, p.621],

P. Paule: J. Symb. Comp. **20** (1995), p. 235-268.

Ziel: Sei $F(k)$ hypergeometrischer Term, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} F(k)$. Entscheide durch Algorithmus, ob es einen hypergeometrischen Term $G(n)$ gibt, $n \in \mathbb{N}$, mit $G(n+1) - G(n) = F(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn ja, berechne $G(n)$ durch Algorithmus .

Definition: Gibt es so ein $G(n)$, so heisst $\sum_{k=0}^{n} F(k)$ *Gosper-summierbar.*
Es folgt dann: $\sum_{k=0}^{n} F(k) = \sum_{k=0}^{n}(G(k+1) - G(k)) = G(n) - G(0)$ ist Teleskop-Reihe und berechnet $\sum_{k=0}^{n} F(k)$ in geschlossener Form.

Bemerkung: Gosper's Algorithmus bewerkstelligt zwei Dinge: Er entscheidet algorithmisch, ob ein hypergeometrisches $G(n)$ existiert, und, wenn ja, berechnet er ein derartiges $G(n)$.

Wir folgen der Darstellung in [A=B, p. 75-86]: Als erstes werden wir die Existenz von $G(n)$ umformulieren in die Existenz von polynomialen Lösungen einer Funktionalgleichung mit polynomialen Koeffizienten. Diese kann dann algorithmisch gelöst werden, indem die Grade der Lösung beschränkt werden.

Algorithmus: Sei $F(n) = G(n+1) - G(n)$ und dividiere $G(n)$ durch $F(n)$. Erhalte

$$\frac{G(n)}{F(n)} = \frac{G(n)}{G(n+1) - G(n)} = \frac{1}{\frac{G(n+1)}{G(n)} - 1}.$$

Dies ist eine rationale Funktion in n, etwa $Y(n)$. Damit

$$G(n) = Y(n) \cdot F(n).$$

Einsetzen in $G(n+1) - G(n) = F(n)$ liefert

$$Y(n+1) \cdot F(n+1) - Y(n) \cdot F(n) = F(n) \quad \textit{oder}$$

$$Y(n+1) \cdot \frac{F(n+1)}{F(n)} - Y(n) = 1 \quad (*),$$

wobei $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ gegebene rationale Funktion. Es genügt also, zum Auffinden von $G(n)$ eine rationale Funktion $Y(n)$ zu berechnen, die $(*)$ erfüllt.

Ursprüngliche Vorgangsweise von Gosper: [A=B, p. 75-86]

Trick: Schreibe $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{a(n)}{b(n)} \cdot \frac{c(n+1)}{c(n)}$ mit Polynomen $a(n), b(n), c(n)$ und $ggT(a(n), b(n+k)) = 1$ für alle $k \geq 0$. So eine Zerlegung existiert immer, siehe unten Lemma 1. Einsetzen in $(*)$ liefert nach Substitution von

$$X(n) := \frac{Y(n)c(n)}{b(n-1)}$$

(rationale Funktion, wenn $Y(n)$ rational) die Funktionalgleichung

$$a(n)X(n+1) - b(n-1)X(n) = c(n) \qquad (\#)$$

mit polynomialen Koeffizienten und unbekannter Funktion $X(n)$. Nach Lemma 2 unten ist jede Lösung $X(n)$ von (#) bereits polynomial, sofern a, b, c polynomial mit $\mathrm{ggT}(a(n), b(n+k)) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es genügt also, nach einer polynomialen Lösung $X(n)$ von (#) Ausschau zu halten. Ihr Grad is nach oben beschränkt durch d, wobei (siehe Lemma 3):

$$d = \deg(c) - \deg(a+b) \;\; \text{wenn } \deg(a-b) \leq \deg(a+b)$$

$$d = \deg(c) - \deg(a) + 1 \;\; \text{wenndeg}(a-b) > \deg(a+b) \text{ und } \mathrm{lk}(a+b) \notin \mathbb{N}$$

$$d = \mathrm{lk}(a+b) \ \text{ oder } \ d = \deg(c) - \deg(a) + 1 \ \text{ wenn } \deg(a-b) > \deg(a+b) \text{ und } \mathrm{lk}(a+b) \in \mathbb{N}$$

Also genügt es, $X(n)$ mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, die Gleichung (#) zur Bestimmung der Koeffizienten zu verwenden (nicht notwending eindeutig) und dann $Y(n)$ und $G(n)$ zurückzurechnen.

Bemerkung: Unter Umständen ist dieser letzte Schritt sehr aufwendig.

Bemerkung: Die vorgestellte "Konstruktion" der gesuchten hypergeometrischen Funktion $G(n)$ sollte nachträglich immer noch verifiziert werden.

Beispiel 1: [A=B, p.78] Sei $F(k) = (4n+1)\frac{n!}{(2n+1)!}$ hypergeometrisch

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{4n+5}{2(4n+1)(2n+3)}.$$

Wähle $a(n) = 1, b(n) = 2(2n+3), c(n) = 4n+1$ mit

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{a(n)}{b(n)} \cdot \frac{c(n+1)}{c(n)}$$

und $\mathrm{ggT}(a(x), b(x+k)) = \mathrm{ggT}(1, 2(2x+2k+3)) = 1$. Wir erhalten für (#) die Gleichung:

$$X(n+1) - 2(2n+1)X(n) = 4n+1$$

mit Lösung $X(n) = -1$. Damit $G(n) = \frac{-2(2n+1)}{4n+1}(4n+1)\frac{n!}{(2n+1)!} = -2\frac{n!}{(2n)!}$ und somit:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} F(k) = \sum_{k=0}^{n} (4k+1)\frac{k!}{(2k+1)!} = 2 - \frac{n!}{(2n+1)!}.$$

Beispiel 2: [A=B, p.86] $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Mit Gosper-Algorithmus:

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

ist rational, wähle $a(n) = n, b(n) = n+2, c(n) = 1$ und erhalte

$$(\#) \quad n \cdot X(n+1) - (n+1)X(n) = 1$$

mit $\deg(a) = \deg(b) = 1, \mathrm{lm}(a) = \mathrm{lm}(b) = n$ und damit $d = 0$ oder $d = 1$. Unbestimmter Ansatz liefert Lösungen $X(n) = -1$ und $X(n) = \alpha \cdot n - 1$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beispiel 3: [A=B, p.86] $\sum_{k=0}^{n} k!$ liefert $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{(n+1)!}{n!} = n$ rationale Funktion, $a(n) = n+1, b(n) = c(n) = 1$ und damit die Gleichung

$$(\#) \quad (n+1)X(n+1) - X(n) = 1.$$

Wegen $\deg(a) \neq \deg(b)$ erhalten wir $\deg(X) \leq d = \deg(c) - \deg(a) = -1$, aber $X \equiv 0$ ist nicht Lösung von (#). Also ist $\sum_{k=0}^{n} k!$ nicht Gosper-summierbar.

Beispiel 4: $\sum_{k=1}^{n} kk!$ mit $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{(n+1)^2}{n}$ rational, wähle $a(n) = n+1, b(n) = 1$ und $c(n) = n$, mit $\deg(a) \neq \deg(b)$ und Gleichung

$$(\#) \quad (n+1)X(n+1) - X(n) = n,$$

wobei $\deg(X) \leq d = \deg(c) - \deg(a) = 0$, also X konstant, nämlich $X = 1, G = n!$ und $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.

Für weitere Beispiele siehe [A=B, p. 95-99].

Implementation: Mathematica: gosper.m (siehe auch [A=B, p. 87]; Maple: sum(F(k), k=0..n);

Beispiel 5: [A=B, p. 91]; Gianbruno und Regev. Zeige, dass $f(n) \neq g(n)$ für alle $n \geq 5$, wobei:

$$f(n) = (-1)^{n+1}(n^2 + 6n + 2)(2n + 1)^{-1}(n + 2)^{-1} + (n + 1)!n!(2n^2 - 5n - 4)(2n + 1)!^{-1}$$

$$g(n) = (n + 1)!(n - 2)! \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k (n - k - 4)p(k, n)}{k!(2n - k - 3)!(k + 3)(k + 2)(n + 2)(2n - k - 2)}$$

mit $p(k, n) = n^3 - 2kn^3 - 3n^2 + k^2 n - kn - 4n + k^2 + 5k + 6$. Mit Maple erhält man:

$$f(n) - g(n) = \frac{-3(n + 1)(n^2 - 2n + 2)(-1)^n}{(n + 2)(2n - 3)(2n - 1)}$$

mit Nullstellen -1 und $1 \pm i$. Also folgt die Behauptung: $f(n) \neq g(n)$ für $n \geq 5$.

Lemma 1: *Sei K Körper der Charakteristik 0, sei $g(x) \in K(x)$ rationale Funktion in einer Variablen, $g \not\equiv 0$. Dann existieren eindeutige Polynome $a, b, c \in K[x]$ mit*

$$g(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x + 1)}{c(x)}$$

und

$$ggT(a(x), b(x + k)) = 1 \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N},$$
$$ggT(a(x), c(x)) = 1,$$
$$ggT(b(x), c(x + 1)) = 1.$$

Die Polynome können mittels Algorithmus konstruiert werden.

Beweis: [A=B, Thm 5.3.1, p.82]; Algorithmus zur Konstruktion von a, b, c: [A=B, p.79].

Lemma 2: *Seien $a, b, c \in K[x]$ Polynome mit $ggT(a(x), b(x + k)) = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Sei $g(x) \in K(x)$ rationale Funktion mit*

$$a(x)g(x + 1) - b(x - 1)g(x) = c(x)$$

Dann ist g(x) bereits Polynom.

Beweis: [A=B, Thm. 5.2.1, p. 76].

Lemma 3: *Seien $a, b, c \in K[x]$, setze $f'(x) = f(x + 1)$ für $f \in K[x]$ und betrachte f als Lösung von*

$$(*) \quad af + bf' = c.$$

(Sei char$(K) = 0$). Dann wird der Grad deg(f) von f wie folgt beschränkt:

- *deg(f) = deg(c) − deg$(a + b)$, wenn deg$(a - b) \leq$ deg$(a + b)$,*
- *deg(f) = deg(c) − deg$(a) + 1$, wenn deg$(a - b) >$ deg$(a + b)$ und lk$(a + b) \notin \mathbb{N}$ (lk=Leitkoeffizient),*
- *deg(f) = lk$(a + b)$ oder deg(f) = deg(c) − deg$(a) + 1$, wenn deg$(a - b) >$ deg$(a + b)$ und lk$(a + b) \in \mathbb{N}$.*

Beweis: [GG, p.628] Schreibe $(*)$ um in

$$(a - b)(f - f') + (a + b)(f + f') = 2c$$

oder

$$A \cdot (f - f') + B \cdot (f + f') = 2c$$

mit $A = a - b$ und $B = a + b$. Da $\mathrm{char}(K) = 0$ ist, gilt

$$\deg(f) = \deg(f + f') = \deg(f - f') + 1.$$

(a) Ist $\deg(A) \leq \deg(B)$, dann $\deg(B \cdot (f + f')) = \deg(2c) = \deg(c)$ und $\deg(f) = \deg(f + f') = \deg(c) - \deg(B) = \deg(c) - \deg(a + b)$.

(b) Ist $\deg(A) > \deg(B)$, dann $\deg(a) = \deg(b)$ und $\mathrm{lk}(a) + \mathrm{lk}(b) = 0$.

(i) Ist $\deg(a) = \deg(b) = 0$, dann $\deg(f) = \deg(c) + 1 = \deg(c) - \deg(a) + 1$.

(ii) Ist $\deg(a) = \deg(b) > 0$ und $\deg(f) \neq \mathrm{lk}(a+b)$, dann liefert Binomialentwicklung von f' und Berechnung des Koeffizienten von $x^{deg(a)+deg(f)-1}$ in $(*)$

$$\mathrm{lk}(a + b) + \deg(f) = \mathrm{coeff}(c)$$

im Grad $\deg(a) + \deg(f) - 1$. Ist dieser Koeffizient von c gleich Null, dann

$$\deg(f) = -\mathrm{lk}(a + b) \in \mathbb{N}.$$

Ist er ungleich Null, dann $\deg(c) = \deg(a) + \deg(f) - 1$ und damit $\deg(f) = \deg(c) - \deg(a) + 1$.

Bemerkung: Wird statt $f'(x) = f(x + 1)$ in (*) allgemeiner $f'(x) = \varphi f(x)$ mit $\varphi \in \mathrm{Aut}K[x]$ genommen, so richten sich die Gradschranken nach dem Grad von $f - \varphi f$ bzw. $f + \varphi f$. Für $\varphi = \mathrm{id}$ ist $(*)$ lösbar, wenn $A \neq B$. Schreibe also $\varphi = \mathrm{id} + \psi$ und entwickle $\varphi f(x) = f(x + \psi(x))$ binomial.

Konstruktion von $Y(n)$ mittel GFF (Grösste Faktorielle Faktorisierung): [Paule, GG]

Anstatt die beiden Lemmatas zu beweisen, gehen wir zurück auf die Gleichung

$$(*) \quad Y(n + 1)\frac{F(n + 1)}{F(n)} - Y(n) = 1$$

mit rationalem $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ und gesuchtem rationalem $Y(n)$. Wir zeigen die Existenz und Konstruktion einer Lösung wie in [Gathen + Gerhard, p. 624], unter Verwendung der GFF von Paule (GFF = Grösste Faktorielle Faktorisierung).

Schreibe also $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{a(x)}{b(x)}$ mit teilerfremden Poynomen $a, b \in K[x]$, und setze $Y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ unbestimmt an mit $f, g \in K[x]$ (f, g nicht notwendig teilerfremd). Wir erhalten aus $(*)$ die äquivalente Gleichung

$$\frac{f(x + 1)}{g(x + 1)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (b \not\equiv 0)$$

oder nach Multiplikation mit dem Nenner

$$(\diamondsuit) \quad a(x)g(x)f(x + 1) - b(x)g(x + 1)f(x) = b(x)g(x)g(x + 1)$$

mit gegebenen Polynomen a, b und gesuchten Polynomen f, g. Zu a und b konstruiert man zuerst ein Polynom $\tilde{g}$. Dann zeigt man, dass zu diesem $\tilde{g}$ ein Polynom $\tilde{f}$ mit $(\diamondsuit)$ genau dann existiert, wenn $(\diamondsuit)$ überhaupt durch Polynome lösbar ist (die Konstruktion von $\tilde{g}$ schränkt also die Lösbarkeit von $(\diamondsuit)$ nicht ein). Da der Grad von $\tilde{f}$ beschränkt werden kann, ist die Lösbarkeit von $(\diamondsuit)$ algorithmisch entscheidbar (vgl. Lemma 3 oben).

Einschub: Grösste faktorielle Faktorisierung von Polynomen - GFF [P. Paule: Greatest Factorial Factorization, J. Symb. Comp. **20** (1995)] bzw. [Gathen, Gerhard: Modern Computer Algebra, Cambridge Univ. Press, p. 617]

Definition: Sei $P(x) \in K[x]$ Polynom in einer Variablen, K Körper.
(a) Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $P^{\underline{k}}$ durch

$$P^{\underline{k}}(x) = P(x) \cdot P(x-1) \cdots P(x-k+1).$$

(b) Sei $P \in K[x]$ normiertes Polynom. Ein Vektor $(P_1, \ldots, P_m)$ von normierten Polynomen $P_k \in K[x]$ heisst *GFF (Grösste faktorielle Faktorisierung)* von P, wenn:
(1) $P = P_1^{\underline{1}} P_2^{\underline{2}} \ldots P_m^{\underline{m}}$,
(2) $P_1, \ldots P_m$ normiert und $P_m \neq 1$,
(3) m ist maximal mit (1) und (2) und unter den Faktorisierungen mit maximalem m sei P_m von maximalem Grad gewählt. Weiters sei P_{m-1} von maximalem Grad in der Faktorisierung von $\frac{P}{P_m^{\underline{m}}}$, und induktiv für alle P_i sei der Grad von P_i maximal in der Faktorisierung von $\frac{P}{P_m^{\underline{m}} \cdots P_{i+1}^{\underline{i+1}}}$.

Bemerkung: Äquivalent zu (3), [GG, p.613]:
(3a) $\mathrm{ggT}(P_k^{\underline{k}}(x), P_i(x+1)) = 1$ für $1 \leq k \leq i \leq m$,
(3b) $\mathrm{ggT}(P_k^{\underline{k}}(x), P_i(x-i)) = 1$ für $1 \leq k \leq i \leq m$.

Bemerkung: Die übliche Primfaktorzerlegung

$$P(x) = \prod_{i=1}^{s} P_i(x)^{d_i}$$

mit $P_i \in K[x]$, $d_i \in \mathbb{N}$ lässt sich umschreiben in

$$P(x) = Q_1(x)^1 \cdot Q_2(x)^2 \cdots Q_k(x)^k \qquad \text{“quadratfreie Zerlegung”}$$

mit k maximal und Q_i maximal bzgl. $\frac{P(x)}{Q_k(x)^k \cdots Q_{i+1}(x)^{i+1}}$.
Beachte: Manche dieser Q_i's können gleich 1 sein (ebenso in der GFF).

Beispiele: (1) $P = (x-1)x^2(x+1)(x+2) = x^{\underline{1}}(x+2)^{\underline{4}} = x^{\underline{2}}(x+2)^{\underline{3}} = (x^2+2x)^{\underline{1}}(x+1)^{\underline{3}} = P^{\underline{1}}$ und $x^{\underline{1}}(x+2)^{\underline{4}}$ ist die GFF, geschrieben $(x, 1, 1, x+2)$.
(2) $P = x(x-1)^3(x-2)^2(x-4)^2(x-5) = x^{\underline{3}}(x-1)^{\underline{2}}(x-4)^{\underline{2}}(x-1)^{\underline{1}}(x-4)^{\underline{1}}$, also ist $x^{\underline{3}} \cdot [(x-1)(x-4)]^{\underline{2}} \cdot [(x-1)(x-4)]^{\underline{1}}$ die GFF von P, geschrieben $((x-1)(x-4, (x-1)(x-4), x)$.
(3) $P = x^{\underline{5}} \cdot [(x-\frac{7}{3}) \cdot (x-\frac{2}{3})]^{\underline{2}}(x-\frac{1}{3})^{\underline{1}}$ ist bereits die GGF von P, geschrieben $(x-\frac{1}{3}, (x-\frac{7}{3})(x-\frac{2}{3}), 1, 1, x)$ [GG, p.618].

Satz 5 (Paule): *Jedes normierte Polynom $P \in K[x], P \neq 0$, besitzt genau eine GFF (grösste faktorielle Faktorisierung). Sie kann rekursiv konstruiert werden durch Konstrukion der Faktorisierung von*

$$Q(x) = ggT(P(x), P(x+1))$$

mit deg(Q) < deg(P). Ist etwa $Q = Q_1^{\underline{1}} \cdots Q_m^{\underline{m}}$ die GFF von Q, dann ist

$$P = P_1^{\underline{1}} Q_1^{\underline{2}} \cdots Q_m^{\underline{m+1}}$$

die GFF von P, wobei $P_1 = P_1^{\underline{1}} = \frac{P}{Q_1^{\underline{2}} \cdots Q_m^{\underline{m+1}}}$.

Beweis: Eindeutigkeit klar nach Definition. Existenz: Wähle $1 \leq m \leq \deg(P)$ maximal, sodass ein $R \in K[x]$ existiert mit $R^{\underline{m}}$ teilt P. Wähle dann R von maximalem Grad mit $R^{\underline{m}}$ teilt P, setze $P_m = R$. Ersetze dann P durch $P/P_m^{\underline{m}}$ und verwende Induktion über $\deg(P)$.

Zusammenhang mit $\mathrm{ggT}(P(x), P(x+1)) = Q$: Ist m maximal, sodass ein $S \in K[x]$ existiert für das $S^{\underline{m}}$ das Polynom Q teilt, dann ist $m+1$ maximal sodass $R \in K[x]$ existiert, für das $R^{\underline{m+1}}$ das Polynom P teilt.

Beispiel: $P(x) = (x-1)x^2(x+1)(x+2)$, also $P(x+1) = x(x+1)^2(x+2)(x+3)$. Daher: $Q(x) = x(x+1)(x+2) = (x+2)^{\underline{3}}$.
Somit erhalten wir folgende GFF von P: $P(x) = x^{\underline{1}} \cdot (x+2)^{\underline{4}}$.

Bemerkung: Ist $P = \prod_{i=1}^m P_i^{d_i}$ Primfaktorzerlegung von P, so schreibe $P = P_1^1 P_2^2 \dots P_k^k$ mit normierten paarweise teilerfremden P_i (füge notfalls $P_i = 1$ für $d_i = 0$ ein). Dies ist die quadratfreie Zerlegung von P. Dann gilt $\mathrm{ggT}(P, P^1) = P_2^1 P_3^2 \cdots P_k^{k-1}$.

Satz 6: *Ist $P = P_1^{\underline{1}} \dots P_m^{\underline{m}}$ GFF von P, dann ist $ggT(P(x), P(x+1)) = ggT(P(x), P(x+1) - P(x)) =: ggT(P, \jmath P) = P_1^{\underline{0}} P_2^{\underline{1}} \dots P_m^{\underline{m-1}}$ die zugehörige GFF von $ggT(P, \jmath P)$.*
($\jmath P(x) = P(x+1) - P(x)$)

Beweis: Induktion über m:
$m = 0:$ $P = 1$, O.K.
$m > 0:$ Aus $P(x) = P_1^{\underline{1}} \cdots P_m^{\underline{m}}$ folgt $P(x+1) = P(x) = P_1^{\underline{1}}(x+1) \dots P_m^{\underline{m}}(x+1)$ und $\mathrm{ggT}(P_m^{\underline{m}}(x), P_m^{\underline{m}}(x+1)) = \mathrm{ggT}(P_m(x) \cdot P_m(x-1) \cdots P_m(x-m+1), P_m(x+1) \cdot P_m(x) \cdots P_m(x-m+2)) = P_m(x) \cdot P_m(x-1) \cdots P_m(x-m+2))$ wegen der Maximalität von m (daher können $P_m(x+1)$ und $P_m(x-m+1)$ keinen gemeinsamen Faktor Q haben, sonst teilt $Q(x)^{\underline{m+1}}$ das Polynom P). Also erhalten wir:

$$ggT(P_m^{\underline{m}}(x), P_m^{\underline{m}}(x+1)) = P_m^{\underline{m-1}}(x).$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion, also:

$$ggT(P(x), P(x+1)) = P_2^{\underline{1}} \cdots P_m^{\underline{m-1}}.$$

Dies ist aber die GFF von $ggT(P(x), P(x+1))$, da m maximal ist (!) nach Konstruktion, und durch Induktion über m.

Bemerkungen: (a) Formuliere GFF für Polynome in mehreren Variablen, beweise die entsprechenden Sätze und verallgemeinere auf beliebige Algebrenautomorphismen $\phi \in K[x]$.
(b) Analoge Frage für formale Potenzreihen.
(c) Verallgemeinere auf Ideale von Polynomen (analog zur Primärzerlegung von Polynomidealen).
(d) Finde andere Anwendungen.

Für beliebige Automorphismen φ von $K[x]$ oder $K(x)$ oder $K[\![x]\!]$ vergleiche Karr: Theory of Summation in finite terms; J. Symb. Comp. **1** (1985), p. 303-315.

Fortsetzung Gosper-Algorithmus: [Paule, p.19], [GG, p.624]. Wir kehren zurück zur konstruierten Lösung der Gleichung ($\diamondsuit$) von früher: $(\frac{a(x)}{b(x)} := \frac{F(x+1)}{F(x)})$

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

für gegebene Polynome $a, b \in K[x], b \neq 0$, und gesuchte Polynome $f, g \in K[x]$. Multiplikation mit dem Nenner und Ersetzen von $a(x)$ durch $a(x+1)$ liefert die Gleichung

$$a(x+1)f(x+1)g(x) - b(x)f(x)g(x+1) = b(x)g(x)g(x+1).$$

Wir schreiben $a'(x)$ für $a(x+1)$ und erhalten:

$$(\triangle) \qquad a'f'g - bfg' = bgg'.$$

O.B.d.A. können wir $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$ annehmen. Wir bestimmen zuerst eine notwendige Bedingung an g für die Lösbarkeit dieser Gleichung. Klar: g teilt bfg' und damit auch bf'; g' teilt $a'f'g$ und damit auch $a'g$ (jeweils im Polynomring $K[x]$).

Sei nun $g = P_1^{\underline{1}} \cdots P_m^{\underline{m}}$ die GFF von g, sodass $g' = P'^{\underline{1}}_1 \cdots P'^{\underline{m}}_m$, $ggT(g,g') = P_1^{\underline{0}} \cdots P_m^{\underline{m-1}}$ und

$$\begin{aligned} g_0 &:= \frac{g}{ggT(g,g')} = P_1(x)P_2(x)\dots P_m(x-m+1), \\ g_1 &:= \frac{g'}{ggT(g,g')} = P_1'(x)\dots P_m'(x) = P_1'\dots P_m'. \end{aligned}$$

Dann gilt $ggT(g_o, g_1) = 1$ und aus $g|bg'$ und $g'|a'g$ folgt: $g_0|b$ und $g_1|a$. Damit ergibt sich für die $p_1,\dots,p_m$: $p_1|a,\ \ p_1|b$ also $p_1|\mathrm{ggT}(a,b)$ und $p_2|a,\ \ p_2|b'$ also $p_2|\mathrm{ggT}(a,b')$.

Allgemeiner: $p_k|\mathrm{ggT}(a, b^{(k-1)}$ für $1 \le k \le m$, wobei $b^{(k-1)}(x) = b(x+k-1)$.

Setze $\tilde{g} = \mathrm{ggT}(a,b)^{\underline{1}} \dots \mathrm{ggT}(a, b^{(M-1)})^{\underline{M}}$. Dann teilt g das Polynom $\tilde{g}$, das aber nur von a und b abhängt (sofern M hinreichend gross).

Es folgt: Die Gleichung

$$(\triangle) \qquad a'f'g - bfg' = bgg'$$

ist genau dann nach f, g lösbar, wenn

$$(\nabla) \qquad a'\tilde{f}'\tilde{g} - b\tilde{f}\tilde{g}' = b\tilde{g}\tilde{g}'$$

mit $\tilde{g}$ wie oben und $\tilde{f} \in K[x]$ lösbar ist.

($\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind im Allgemeinen nicht teilerfremd.)

Bestimme dann Lösung $\tilde{f}$ durch unbestimmten Ansatz oder Division (wenn eine Lösung existiert). Gibt es keine Lösung von (∇), dann hat es auch keine rationale Lösung $\frac{f}{g}$ von $(\triangle)$ gegeben.

Bemerkung: (a) Man könnte etwas präziser vorgehen und verwenden, dass $g_1|\mathrm{ggT}(a,b)$, $p_2|\frac{a}{p_1}$, $p_2|\frac{b'}{p_1'}$, also $p_2|\mathrm{ggT}(\frac{a}{p_1}, \frac{b'}{p_1'})$ etc., vgl. [Paule, p.19], und erhielte statt $\tilde{g}$ wie oben ein Polynom von niedrigerem Grad.

(b) Die Verwendung der GFF erlaubt also, die Lösbarkeit von $(\diamondsuit)$ durch die Lösbarkeit einer Gleichung

$$a(x)f(x) + b(x)f(x+1) = c(x)$$

für gegebene Polynome $a, b, c \in K[x]$ und ein gesuchtes Polynom $f \in K[x]$ zu ersetzen. Statt $f(x+1)$ könnte auch φf stehen mit $\varphi \in \mathrm{Aut}K[x]$ (siehe unten Satz 2).

(c) Das obige Verfahren zur Konstruktion von $\tilde{g}$ wie in (a) liefert Konstruktion der GFF eines Polynoms $P \in K[x]$. Setze $a' = \frac{P'}{ggT(P,P')}$ und $b = \frac{P}{ggT(P,P')}$ und konstruiere rekursiv:

$$\begin{aligned} P_1 &= ggT(a,b), \\ P_2 &= ggT(\frac{a}{P_1}, \frac{b'}{P_1'}),\ etc. \end{aligned}$$

Zusammenfassung Gosper-Algorithmus:

Gesucht ist ein hypergeometrischer Term $G(k)$ mit $F(k) = G(k+1) - G(k)$. Falls kein derartiges $G(k)$ existiert, zeige dies durch Algorithmus.

1. Schritt: $\frac{G(n)}{F(n)} = \frac{G(n)}{G(n+1)-G(n)} = \frac{1}{\frac{G(n+1)}{G(n)}-1} =: Y(n)$ und $\frac{G(n+1)}{G(n)}$ ist rationale Funktion, wenn G hypergeometrisch; also auch $Y(n)$ rational. Die Gleichung $F(n) = G(n+1) - G(n)$ ist äquivalent zu

$$1 = \frac{G(n+1)}{F(n)} - \frac{G(n)}{F(n)}$$

oder

$$1 = Y(n+1) \cdot \frac{F(n+1)}{F(n)} - Y(n).$$

Hier ist $F(n+1)/F(n)$ rationale Funktion. Gesucht ist rationale Funktion $Y(n)$, die die Gleichung löst (beachte: alle hypergeometrischen Terme wurden eliminiert).

2. Schritt: Schreibe $\frac{F(x+1)}{F(x)} = \frac{a(x)}{b(x)}$ mit teilerfremden $a, b \in K[x]$, und setze $Y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit unbestimmten $f, g \in K[x]$ an. Erhalte durch Substitution in $1 = Y(x+1)\frac{F(x+1)}{F(x)} - Y(x)$ die Gleichung

$$a(x)g(x)f(x+1) - b(x)g(x+1)f(x) = b(x)g(x)g(x+1),$$

oder mit $f'(x) := f(x+1)$ und nach Ersetzen von a durch a':

$$a'f'g - bfg' = bgg'.$$

Konstruiere ein Polynom

$$\tilde{g} = \mathrm{ggT}(a,b)^{\underline{1}} \cdots \mathrm{ggT}(a, b^{(m-1)})^{\underline{m}}$$

(oder alternativ $\tilde{g}$ definiert wie in [Paule, p.19]), wobei m maximal ist mit $ggT(a, b^{(m-1)}) \neq 1$. Dann gilt: Die Gleichung

$$a'f'g - bfg' = bgg'$$

ist genau dann nach f, g lösbar, wenn mit G wie oben die Gleichung

$$a'\tilde{f}'\tilde{g} - b\tilde{f}\tilde{g}' = b\tilde{g}\tilde{g}'$$

nach $\tilde{f}$ lösbar ist.

3. Schritt: Teste die Lösbarkeit dieser Gleichung durch unbestimmten Ansatz für $\tilde{f}$, wobei der Grad von $\tilde{f}$ wie in Lemma 3 von vorneherein beschränkt werden kann.

Bemerkung: (a) Wir haben $\mathrm{ggT}(a, b^{(m-1)}) \neq 1$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a(x), b(x+m-1)) \neq 1$. Ist $R(y)$ die Resultante von $a(x)$ und $b(x+y)$ bezüglich x, $R(y) = \mathrm{Res}_x(a(x), b(x+y))$ dann ist $\mathrm{ggT}(a(x), b(x+m-1)) \neq 1$ genau dann, wenn $R(m-1) = 0$ ist. Damit kann in der Konstruktion von G auch diese Resultante zur Feststellung der Terminierung verwendet werden.
(b) Es ist nicht klar, ob der unbestimmte Ansatz in Schritt 3 von der Komplexität her sehr unhandlich ist und nicht besser durch eine geeignete "symmetrisierte" Division von bgg' durch $a'g$ und bg' ersetzt werden sollte.

Beispiel 1: [GG, p.627] Sei $F(k) = k \cdot k!$, also $F(x) = x \cdot \Gamma(x+1)$ mit $\frac{F(x+1)}{F(x)} = \frac{(x+1)\Gamma(x+2)}{x\Gamma(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x}$ rationale Funktion. Mit $\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{F(x+1)}{F(x)}$ erhalten wir $a(x) = (x+1)^2$ und $b(x) = x$. Ersetzen von a durch a' liefert Gleichung

$$(x+1)^2 f'g - xfg' = bgg',$$

wobei nun $a = x^2$. Es gilt $ggT(a,b) = x$ und $ggT(a,b') = ggT(x^2, (x+1)) = 1$, also $m = 1$ und $\tilde{g} = ggT(a,b)^{\underline{1}} = x$. Wir müssen also die Gleichung

$$(x+1)^2 \cdot x \cdot \tilde{f}(x+1) - x \cdot (x+1)\tilde{f}(x) = x \cdot x \cdot (x+1)$$

oder

$$(x+1)\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = x$$

auf ihre Lösbarkeit prüfen. Hier existiert Lösung $\tilde{f}(x) = 1$, also gibt es rationale Funktion $\frac{f}{g}$ wie oben, mit g teilt $\tilde{g}$. Wegen $Y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{G(x)}{G(x+1)-G(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ mit $(x+1)^2\tilde{f}'\tilde{g} - x\tilde{f}\tilde{g}' = x\tilde{g}\tilde{g}'$ ergibt sich $Y(x) = \frac{1}{x}$ und $G(x) = Y(x) \cdot F(x) = \Gamma(x+1)$. Damit erhalten wir

$$F(x) = x \cdot \Gamma(x+1) = G(x+1) - G(x) = \Gamma(x+2) - \Gamma(x+1)$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1.$$

Beispiel 2: [GG, p.628] $F(k) = (k^2 - nk)^{-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, also $F(x) = \frac{1}{x^2+nx}$. Wir erhalten

$$\frac{F(x+1)}{F(x)} = \frac{x(x+n)}{(x+1)(x+n+1)},$$

$a' = x(x+1), b = (x+1)(x+n+1)$. Rechnung ergibt $m = n-1$ und $\tilde{g} = (x+n-1)^{\underline{n-1}} = (x+1)^{\overline{n-1}}$ (mit verfeinerter Definition von $\tilde{g}$). Löse nun

$$x\tilde{f}(x+1) - (x+n+1)\tilde{f}(x) = (x+n+1)(x+1)^{\overline{n-1}}$$

mit $\deg(\tilde{f}) = n+1$ und Lösung $\tilde{f} = -\frac{1}{n}(x+n) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{\overline{n}}\right)$.

Beispiel 3: [GG, p.631] $F(x) = \frac{1}{x},\ a' = x,\ b = x+1,\ m = 0$ und $\tilde{g} = 1$ mit Gleichung

$$x \cdot \tilde{f}(x+1) - (x+1)\tilde{f}(x) = x+1.$$

Nach Lemma 3 besitzt diese Gleichung keine polynomiale Lösung, also ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nicht hypergeometrisch bis auf additive Konstante.

Beispiel 4: [GG, p.631] $\sum_{0\leq k\leq N}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ wenn $N \geq n$. Wie lautet die Summe wenn $N < n$? $F(x) = (-1)^x\binom{n}{x}$ mit $\frac{F(x+1)}{F(x)} = \frac{x-n}{x+1},\ a' = x-n,\ b = x+1$. Rechnung liefert $m = 0$ und $\tilde{g} = 1$. Löse nun

$$(x-n)\tilde{f}(x+1) - (x+1)\tilde{f}(x) = x+1$$

mit $\deg(\tilde{f}) = 1 + \deg(x+1) - \deg(x-n) = 1$ oder $\deg(\tilde{f}) = n+1 = \mathrm{lk}((x+1)-(x-n))$ nach Lemma 3. Unbestimmter Ansatz für $\deg(\tilde{f}) = 1$ liefert $\tilde{f} = -\frac{x}{n}$ und damit wegen $-\frac{x}{n} \cdot (-1)^x \cdot \binom{n}{x} = (-1)^{x-1}\binom{n-1}{x-1}$ die Summe

$$\sum_{0\leq k\leq N}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}.$$

Untersuche analog den Fall $\deg(\tilde{f}) = n+1$ [GG, p.633].

Weitere Beispiele: [A=B, p. 86-99].

Bemerkung: Gosper's Algorithmus entscheidet, ob ein hypergeometrischer Term $F(k)$ von der Gestalt $F(k) = G(k+1) - G(k)$ mit hypergeometrischem $G(k)$ ist (und damit dann $\sum_{k=0}^{n} F(k) = G(n+1) - G(0)$ mit Teleskopreihe). Aber $\sum_{k=0}^{n} F(k)$ könnte auch "summierbar" sein, ohne dass $F(k) = G(k+1) - G(k)$ mit G hypergeometrisch. Beispielsweise ist $\binom{n}{k}$ nicht Gosper summierbar bzgl. k (mit $n \in \mathbb{N}$ fixiert), aber $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ hat einfache Form, obwohl $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ nicht also Differenz eines hypergeometrischen Terms

$G(n+1)$ mit einer Konstanten $G(0)$ interpretiert werden kann. Eine Lösung dieser Zwickmühle liefert der Zeilberger-Algorithmus.

D. Zeilberger-Algorithmus [A=B, p. 101-110], [GKP, p. 229-241]

Erinnerung Fasenmyer: Zu einem gegebenen eigentlichen hypergeometrischen Term $F(n,k)$ findet der Algorithmus Indexmengen I und J und von k unabhängige polynomiale Koeffiezienten $a_{ij}(n)$, nicht alle Null, die die Rekursion

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_{ij}(n)F(n+i,k+j)=0$$

erfüllen (dividiere durch $F(n,k)$ und erhalte Linearkombination von rationalen Funktionen, ordne nach Erweitern mit Nenner nach Potenzen von k und erhalte lineares Gleichungssystem für die $a_{ij}(n)$ durch Nullsetzen der Koeffizienten. Die Anzahl der Unbestimmten $a_{ij}(n)$ wächst für wachsende I und J schneller als die Anzahl der Gleichungen und damit gibt es für I und J hinreichend gross eine nicht triviale Lösung).

Erinnerung Gosper: Zu gegebenem hypergeometrischem Term $F(k)$ findet der Algorithmus, sofern existent, hypergeometrischen Term $G(k)$ mit Gleichung

$$F(k)=G(k+1)-G(k),$$

ansonsten meldet er: unmöglich (wandle Gleichung um in polynomiale Gleichung $a(x)f(x)+b(x)f(x+1)=c(x)$ mit gegebenen Polynomen a,b,c und gesuchtem f, dessen Grad nach oben beschränkt werden kann).

Nachteile: Fasenmyer ist relativ langsam (schon in Beispielen wie $\sum\binom{n}{k}^3$ oder $\sum\binom{n}{k}^4$ [A=B, p. 60 + 69-70]), Gosper ist nur sehr begrenzt anwendbar (etwa ist $\sum\binom{n}{k}z^k$ für $z\neq -1$ nicht Gosper-summierbar). Aber: Viele Summen haben einfache geschlossene Form (etwa $\sum\binom{n}{k}z^k=(1+z)^n$), die aber nicht hypergeomtrisch sein müssen.

Bemerkung: Fasenmyer liefert durch Summation über k eine Rekursion $\sum a_{ij}(n)f(n+i)$ für $f(n)=\sum_k F(n,k)$, die man manchmal lösen kann. Gosper liefert immmer (wenn möglich) eine Formel für die Summe $\sum_{k=0}^n F(k)=G(n+1)-G(0)$ mit $G(n+1)$ hypergeometrisch. Beachte, dass statt $F(k)$ auch $F(n,k)$ mit Gosper behandelt werden kann, falls $F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k)$ existiert [GKP, p.241]. Zeilberger's Algorithmus konstruiert eine Rekursion wie bei Fasenmyer, aber mit Shifts nur in n, dafür rechte Seite ungleich 0, die aber Gosper summierbar ist. Grosser Vorteil: viel schneller als Fasenmyer!

Genauer: Gegeben ist $F(n,k)$ eigentlicher hypergeometrischer Term, finde $a_i(n)$ Polynome in n, $i\in I$ ($I\subseteq\mathbb{N}$ endlich), nicht alle Null, und hypergeometrischen Term $G(n,k)$ mit

$$\sum_{i\in I} a_i(n)F(n+i,k)=G(n,k+1)-G(n,k).$$

Hat dann $G(n,k)$ endlichen Träger bzgl. k, so liefert Summation über k eine lineare Rekursion

$$\sum_{i\in I} a_i(n)\cdot f(n+i)=0$$

mit $f(n)=\sum_k F(n,k)$ und polynomialen $a_i(n)$. Mit dem Algorithmus von Petkovšek lässt sich dann prüfen, ob die Rekursion eine Lösung $f(n)$ hat, die sich als endliche Summe von hypergeometrischen Termen darstellen lässt. Wenn das der Fall ist, wird diese auch ausgerechnet.

Bemerkung: Die Existenz der Identität

$$\sum a_i(n)F(n+i,k)=G(n,k+1)-G(n,k)$$

lässt sich mit Fasenmyer's Lemma (Satz 4), sehr schnell beweisen, siehe Satz 9 unten. Die (schnelle) Konstruktion der $a_i(n)$ verläuft allerdings anders und verwendet wesentlich den Gosper Algorithmus, siehe Satz 10 unten.

Satz 9: [A=B, p.105] *Sei $F(n,k)$ ein eigentlicher hypergeometrischer Term in n und k. Dann existieren eine Indexmenge $I = \{0,\ldots,i_0\}$ (mit a priori beschränkbarem i_0), Polynome $a_i = K[x]$ für $i \in I$, und ein hypergeometrischer Term $G(n,k)$ mit*

$$\sum_{i\in I} a_i(n) \cdot F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

Zudem kann $G(n,k)$ so gewählt werden, dass $G(n,k)/F(n,k)$ rationale Funktion in n und k ist.

Beweis: Nach Fasenmyer's Lemma (Satz 4) existiert ein Polynom $P(x,z,w) \in K[x,z,w]$ ungleich Null, sodass $P(n,S_z,S_w)F(n,k) = 0$ für $n,k \in \mathbb{N}$, wobei $S_z g(n,k) = g(n+1,k)$ und $S_w g(n,k) = g(n,k+1)$ die Shiftoperatoren auf $K[z,w]$ bezeichnen. Dividiere $P(x,z,w)$ durch $w-1$ und erhalte

$$P(x,z,w) = P_0(x,z) - (w-1)P_1(x,z,w)$$

mit $P_0 \in K[x,z]$ und $P_1 \in K[x,z,w]$. Umschreiben liefert

$$\begin{aligned} P_0(n,S_z)F(n,k) &= (S_w - 1)P_1(x,S_z,S_w)F(n,k) \\ &=: (S_w-1)G(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \end{aligned}$$

für hypergeometrischen Term $G(n,k) = P_1(x,S_z,S_w) \cdot F(n,k)$. Es gilt $\frac{G(n,k)}{F(n,k)}$ ist rationale Funktion in n und k (da jeder Shift $F(n+1,k)/F(n,k)$ und $F(n,k+1)/F(n,k)$ rational ist). Da $F(n,k)$ eigentlich hypergeomtrisch ist, folgt dass auch $P(n,S_z,S_w)F(n,k)$ eigentlich hypergeometrisch ist [GKP, p.240].
Noch zu zeigen: $P_0(n,s_z) \not\equiv 0$. O.B.d.A. können wir P von minimalem Grad in w wählen. Wäre $P_0(x,z) \equiv 0$, dann $P(x,z,w) = -(w-1)P_1(x,z,w)$, also $(s_w-1)\cdot P_1(n,s_z,s_w)F(n,k) = 0$ oder $(s_w-1)G(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) = 0$. Damit ist $G(n,k)$ unabhängig von k, $G(n,k) = G(n)$. Wegen $\frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{a(n)}{b(n)}$ rational erhalten wir lineare Rekursion 1. Ordnung: $a(n)G(n+1) - b(n)G(n) = 0$. Schreibe dies als $Q(x,S_x)G(n,k) = 0$, also $Q(x,S_x) \cdot P_1(x,S_z,S_w) \cdot F(n,k) = 0$ mit $\deg_w(Q(x,z)\cdot P_1(x,z,w)) < \deg_w(P(x,z,w))$ weil $\deg_w(P_1(x,z,w)) = deg_w(P(x,z,w)) - 1$ nach Konstruktion.

Bemerkung: Die Identität $\sum a_i(n)F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$ liefert folgende Idee (Zeilberger) zur schnelleren Konstruktion derselben Identität: Angenommen, die $a_i(n)$ seien bereits gefunden worden. Wegen $G(n,k)$ hypergeometrisch folgt, dass die Summe $\sum a_i(n)F(n+i,k)$ Gosper-summierbar ist, und der Gosper-Algorithmus fähig ist, $G(n,k)$ zu konstruieren. Dabei wird ein lineares polynomiales Gleichungssystem durch unbestimmten Ansatz gelöst, wobei die Koeffizienten des gesuchten Polynoms lineare Gleichungen erfüllen müssen. Rücksubstitution in $G(n,k)$ und in die Identität liefert lineares Gleichungssystem in den $a_i(n)$ und in diesen unbestimmten Koeffizienten. Hier können nun die $a_i(n)$ ebenfalls als unbekannt angenommen werden, und eine Lösung für $a_i(n)$ und die Koeffizienten gesucht werden. Vergleiche dazu die Ausführungen von Zeilberger in [Z, p.91 + 196-199], bei denen die Existenz von $a_i(n)$ durch die Holonomie von $F(n,k)$ deduziert wird. Denn: Aus der Holonomie von $F(n,k)$ (die impliziert, dass $F(n,-)$ und $F(-,k)$ lineare Rekursionen mit polynomialen Koeffizienten erfüllen, die "linear unabhängig" sind) folgt, dass $f(n) = \sum_k F(n,k)$ holonom ist, d.h., eine lineare homogene Rekursion mit polynomialen Koeffizienten erfüllt, etwa

$$\sum_{i\in I} a_i(n) \cdot f(n) = 0$$

(dies ist gerade das Ergebnis von Fasenmyer's Algorithmus, allerdings ohne Shifts in k).

Anwendung: Zeilberger verwendet den Gosper-Algorithmus, um simultan die Koeffizienten $a_i(n)$ und die hypergeometrischen Terme $G(n,k)$ zu konstruieren, sodass

$$\sum a_i(n)F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

Dies liefert eine wesentlich schnellere Konstruktion als es Fasenmyers's Algorithmus angewandt auf Satz 9 erlauben würde.

Algorithmus: [A=B, p.106]

1. Schritt: Für gegebenes $F(n,k)$ eigentlich hypergeometrisch, setze $i_0 = 0$ und starte Gopser-Algorithmus (in zwei Variablen) um

$$F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

nach $G(n,k)$ zu lösen, mit $G(n,k)$ hypergeometrisch und $G(n,k)$ rationales Vielfaches von $F(n,k)$. Existiert so ein $G(n,k)$, dann fertig. Existiert kein $G(n,k)$, so setze $i_0 = 1$ und gehe zum 2. Schritt.

2. Schritt: Sei nun $i_0 \geq 0$ durch vorhergehenden Schritt bereits festgelegt. Setze unbestimmt an

$$\sum_{i=0}^{i_0} a_i(n)F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

mit unbekannten Polynomen $a_i \in K[x]$ und unbekannten hypergeometrischen Termen $G(n,k)$. Betrachte nun $H(k) = H(n,k) := \sum_{i=0}^{i_0} a_i(n)F(n+i,k)$ und den Quotienten $\frac{H(k+1)}{h(k)}$ mit zu lösender Gleichung

$$\frac{H(k+1)}{H(k)} Y(k+1) - Y(k) = 1,$$

vgl. früher, wobei $Y(k)$ rationale Funktion. Beachte, dass die $H(k)$ nun auch von den $a_i(n)$ abhängen.

Behauptung: Es existieren Polynome $a, b \in K[x,y]$ und $c \in K[a_i, x, y]$ mit

$$\frac{H(y+1)}{H(y)} = \frac{H(x,y+1)}{H(x,y)} = \frac{c(x,y+1)}{c(x,y)} \cdot \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$$

wobei die a, b nicht von den a_i abhängen.

Beweis: Schreibe $\frac{F(x,y+1)}{F(x,y)} = \frac{r(x,y)}{s(x,y)}$ und $\frac{F(x,y)}{F(x-1,y)} = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}$ mit Polynomen $r, s, u, v \in K[x,y]$ (existieren, da $F(x,y)$ hypergeometrisch in x und y). Damit

$$\begin{aligned}\frac{F(x+i,y)}{F(x,y)} &= \prod_{l=0}^{i-1} \frac{F(x+i-l,y)}{F(x+i-l-1,y)} \\ &= \prod_{l=0}^{i-1} \frac{u(x+i-l,y)}{v(x+i-l,y)}.\end{aligned}$$

Einsetzen in

$$\begin{aligned}\frac{H(x,y+1)}{H(x,y)} &= \frac{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x)F(x+i,y+1)}{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x)F(x+i,y)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x) \cdot F(x+i,y+1)/F(x,y+1)}{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x)F(x+i,y)/F(x,y)} \cdot \frac{F(x,y+1)}{F(x,y)}\end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned}\frac{H(x,y+1)}{H(x,y)} &= \frac{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x) \left[\prod_{l=0}^{i-1} \frac{u(x+i-l,y+1)}{v(x+i-l,y+1)}\right]}{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x) \left[\prod_{l=0}^{i-1} \frac{u(x+i-l,y)}{v(x+i-l,y)}\right]} \cdot \frac{r(x,y)}{s(x,y)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x) \cdot \prod_{l=0}^{i-1} u(x+i-l,y+1) \prod_{m=i+1}^{i_0} v(x+m,y+1)}{\sum_{i=0}^{i_0} a_i(x) \cdot \prod_{l=0}^{i-1} u(x+i-l,y) \prod_{m=i+1}^{i_0} v(x+m,y)} \frac{\prod_{m=1}^{i_0} v(x+m,y)}{\prod_{m=1}^{i_0} v(x+m,y+1)} \frac{r(x,y)}{s(x,y)} \\ &=: \frac{c(a_i,x,y+1)}{c(a_i,x,y)} \cdot \frac{a(x,y)}{b(x,y)}.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

3. Schritt: Nach Gosper's Algorithmus müssen wir die Gleichung

$$\frac{H(x,y+1)}{H(x,y)} \cdot Y(x,y+1) - Y(x,y) = 1$$

für eine rationale Funktion $Y(x,y)$ zu lösen versuchen. Substitution der obigen Formel für $H(x,y+1)/H(x,y)$ liefert die Gleichung (mit $Y(x,y) =: \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$):

$$\frac{c(a_i,x,y+1)}{c(a_i,x,y)} \cdot \frac{a(x,y)}{b(x,y)} \cdot \frac{f(x,y+1)}{g(x,y+1)} - \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 1.$$

Wir ersetzen, ähnlich wie im Gosper-Algorithmus, das Polynom $g(x,y)$ durch ein Polynom $\tilde{g}(x,y)$, das ein Vielfaches von $g(x,y)$ ist, sofern eine Lösung $\frac{f}{g}$ der Gleichung existiert. Schreibe wieder $a(x,y+1)$ statt $a(x,y)$ und setze nun $\tilde{g}(x,y) := c(a_i,x,y) \cdot \mathrm{ggT}(a,b)^{\underline{1}} \cdots \mathrm{ggT}(a,b^{(m-1)})^{\underline{m}}$. Einsetzen in die obige Gleichung und Multiplikationmit Produkt der Nenner liefert die Gleichung

$$a(x,y+1)G(x,y)f(x,y+1) - b(x,y)G(x,y+1)f(x,y) = c(a_i,x,y)G(x,y)G(x,y+1)b(x,y),$$

wobei $G(x,y) = \mathrm{ggT}(a,b)^{\underline{1}} \cdots \mathrm{ggT}(a,b^{(m-1)})^{\underline{m}} = \frac{\tilde{g}(x,y)}{c(a_i,x,y)}$. Beachte: Die (unbekannten) $a_i(x)$ tauchen nur mehr auf der rechten Seite auf (und zwar linear), das unbekannte $f(x,y)$ auf der linken Seite. Zudem hängen die $a_i(x)$ nicht von y ab, also lässt sich der Grad von f bzgl. y wie früher (Lemma 3) beschränken, und f mit unbestimmten Ansatz ausrechnen. Schreibe also $f(x,y) = \sum_{j \le d} f_j(x) y^j$ und erhalte lineares Gleichungssystem in den $a_i(x)$ und $f_j(x)$ mit Koeffizienten in $K[x]$ (verwende etwa die Berechnung des Syzgienmoduls von einem Vektor von Polynomen via Gröbnerbasen zur Bestimmung der $a_i(x)$ und $f_j(x)$, sofern sie existieren).

4. Schritt: Existieren keine Lösungen $a_i(x)$ und $f_j(x)$ des linearen Gleichungssystems, erhöhe i_0 um 1 und wiederhole den Algorithmus ab Schritt 2.

Bemerkung: Nach der Existenzaussage für eine Darstellung

$$\sum_{i=0}^{i_0} a_i(n)F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

für hinreichend grosses i_0 terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Iterationen.
Bemerkung: Meistens gengt $i_0 = 1$.

Beispiel 1: $F(n,k) = 2^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k}$ (siehe auch [A=B, p. 104]).

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} F(n,k) = \sum_k F(n,k)$$

Rechnung liefert dann "Rekursion":

$$(S_n^2+1)(S_n-2)F(n) = (S_n-1)G(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

wobei $G(n,k) = \frac{2^k n}{n-3k+3}\binom{n-k}{2k-2}$. Summation ber k ergibt:

$$\begin{aligned}
(S_n^2+1)(S_n-2)f(n) &= \sum_k (G(n,k+1) - G(n,k)) \\
&= \sum_k \left(\frac{2^{k+1}n}{n-3k}\binom{n-k-1}{2k} - \frac{2^k n}{n-3k+3}\binom{n-k}{2k-2} \right) \\
&= 0 \\
&= G(n,k+1) - G(n,0)
\end{aligned}$$

also: $(S_n^2+1)(S_n-2)f(n)=0$.

Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten mit allgemeiner Lsung:

$$f(n)=a2^n+bi^n+c(-i)^n$$

Einsetzen fr $n=1,2,3$ liefert:

$$f(n)=\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}i^n+\frac{1}{2}(-i)^n$$

also

$$f(n)=2^{n-1}+cos(\frac{n\pi}{2})$$

Beispiel 2: siehe auch [A=B, p. 114].

$$F(n,k)=\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$f(n)=\sum_k F(n,k)=\sum_{k=0}^{n}F(n,k)$$

Fr $i_0=0$ erhalten wir keine Rekursion - gleiches gilt für $i_0=1$. Erst für $i_0=2$ liefert kurze Rechnung:

$$f(n+1)f(n)-(n+2)f(n+2)=0$$

Mit $f(0)=1$ und $f(1)=0$ ergibt sich:

$$f(2n+1)=0$$
$$f(2n)=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Beispiel 3: $F(n,k)=\binom{n}{k}z^k$; $f(n)=\sum_k\binom{n}{k}z^k=(1+z)^k$ ($z\in K$ bzw. Variable)siehe [GKP, p. 230]. Nicht Gosper summierbar, aber mit Zeilberger Algorithmus erledigbar! Für $z\neq-1$ ist $F(n,k)$ nicht Gosper summierbar, also mu $i_0>0$ gewhlt werden (i_0 wie im Algorithmus). Teste $i_0=1$, setze also $\tilde{F}(n,k)=a_0(n)F(n,k)+a_1(n)F(n+1,k)$ mit unbestimmten Polynomen a_0,a_1. F(n,k) hypergeometrisch,

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}=\frac{n+1}{n+1-k}$$

rational. Damit: $\tilde{F}(n,k)=\frac{\tilde{a}(n,k)\cdot F(n,k)}{n+1-k}$, wobei $\tilde{a}(n,k)=(n+1-k)a_0(n)+(n+1)a_1(n)$. Wende für jedes $n\in\mathbb{N}$ Gosperalgorithmus auf $\tilde{F}(n,k)$ an. Schreibe also (vgl. ursprüngl. Version von Gosper) (*)

$$\frac{\tilde{F}(n,k+1)}{\tilde{F}(n,k)}=\frac{a(n,k)}{b(n,k)}\cdot\frac{c(n,k+1)}{c(n,k)}$$

mit $ggT(a(n,k),b(n,k+l))=1\forall\ l=0,1,2,3,...$, wobei n Variable (vgl. Lemma 1 von früher).

Es ist nicht klar, wie man für ungekannte a_0,a_1 diese Darstellung finden soll! Ausweg: Setze $\hat{F}(n,k)$ geeignet an (unabhängig von a_0,a_1).

$$\hat{F}(n,k):=\frac{\tilde{F}(n,k)}{\tilde{a}(n,k)}$$

und weiter: $\hat{c}(n,k) := \frac{c(n,k)}{\tilde{a}(n,k)}$. Damit geht (*) über in:

$$\frac{\hat{F}(n,k+1)}{\hat{F}(n,k)} = \frac{a(n,k)}{b(n,k)} \cdot \frac{\hat{c}(n,k+1)}{\hat{c}(n,k)}$$

wobei $a, b, \hat{c}$ unabhngig von a_0, a_1. Solche a, b, c knnen konstruiert werden (s. frher). Hier: $\hat{F}(n,k) = \frac{F(n,k)}{n+1-k} = \frac{n! z^k}{(n+1-k)!k!}$.

$$\frac{\hat{F}(n,k+1)}{\hat{F}(n,k)} = \frac{(n+1-k)\cdot z}{k+1} \cdot \frac{1}{1}$$

mit $a(n,k) = (n+1-k)z$ und $b(n,k) = k+1$ sowie $c(n,k) = 1$. Beachte, da $ggT(a(n,k), b(n,k+l)) = 1$, da n Variable. Einsetzen liefert die GLeichung:

$$\hat{c}(n,k) = a(n,k) \cdot g(n,k+1) - b(n,k-1)g(n,k)$$

mit unbekannten Polynomen $g(n,k)$ (vgl. Gosper Algorithmus). Hier:

$$(n+1-k)a_0(n) + (n+1)a_1(n) = (n+1-k)zg(n,k+1) - kg(n,k)$$

Nach Petkovsek Algorithmus zum Auffinden polynomialer Lsungen $g(n,k)$ (betrachte hier wieder n als Variable oder Parameter) ist jede polynomiale Lsung $g(n,k)$ vom Grad kleiner gleich d (wie in Satz 7). Hier wegen $z \neq -1$ erreichnet man $d = 0$. Also

$$g(n,k) = g_0(n) \cdot k^0$$

Polynom in n. Einsetzen ergibt:

$$(n+1-k)a_0(n) + (n+1)a_1(n) = ((n+1-k)z - k)g_0(n)$$

Noch Koeffizienten Vergleich: $a_0(n) = z+1$, $g_0(n) = g(n,k) = 1$, $a_1(n) = -1$.

$$G(n,k) = \frac{b(n,k-1)g(n,k)\hat{F}(n,k)}{\hat{c}(n,k)} = \frac{k}{n+1-k}\binom{n}{k}z^k = \binom{n}{k-1}z^k$$

$$\hat{F}(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

G(n,k) hat bzgl. k endlichen Trger: $\sum_k \tilde{F}(n,k) = \sum_k (z+1)F(n,k) - F(n+1,k) = 0$, also: $(z+1)f(n) - f(n+1) = 0$ und somit $f(n+1) = (z+1)f(n)$. Wegen $f(0) = 1$ ergibt sich: $f(n) = (z+1)^n$.

Beispiel 4:

$$\sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$$

mit x, y Variablen oder aus K. $F(n,k) = \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$. Im Falle $i_0 = 0$ ist $F(n,k)$ Gosper-Summierbar genau dann, wenn $x+y = 0$. Fr $i_0 = 1$ gilt: $\tilde{F}(n,k) = a_0(n)F(n,k) + a_1(n)F(n+1,k)$ und weiter $\hat{F}(n,k) = \frac{\tilde{F}(n,k)}{\tilde{a}(n,k)}$ mit $\tilde{a}(n,k) = (n+1-k)a_0(n) + (y-n+k)a_1(n) = \dots$.

$$\hat{F}(n,k) = \frac{F(n,k)}{n+1-k} = \frac{x!y!}{(x-k)!k!(y-n+k)!(n+1-k)!}$$

mit $a(n,k) = (n+1-k)(x-k)$, $b(n,k) = (y-n+k+1)(k+1)$, $\hat{c}(n,k) = 1$ gesuchte polynomiale Lsung $g(n,k)$ der "kritischen" Gleichung hat Grad $d = 0$, also wieder $g(n,k) = g_0(n)$. Einsetzen liefert Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (n+1)a_0(n) + (y-n)a_1(n) - (n+1)xg_0(n) &= 0 \\ -a_0(n) + a_1(n) + (x+y+1)g_0(n) &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: $a_0(n) = x+y-n$, $g_0(n) = 1$, $a_1(n) = -n+1$, also $\tilde{F}(n,k) = (x+y-n)F(n,k)-(n+1)F(n+1,k)$ Gosper summierbar. Summation ber k liefert:

$$\sum_k F(n+1,k) = \frac{x+y-n}{n+1}\sum F(n,k)$$

$$f(n+1) = \frac{x+y-n}{n+1} f(n)$$

also

$$f(n) = \binom{x+y}{n}$$

Beispiel 5: Die Saalschtz-Identitt [GKP, p. 234]

$$\sum_k \frac{(x+y+z+w+k)!}{(x-k)!(y-k)!(z+k)!(w+k)!k!} = \frac{(x+y+z+w)!(x+y+z)!(x+y+w)!}{x!y!(x+z)!(x+w)!(y+z)!(y+w)!}$$

mit x, y, z, w Variable, x oder y aus $\mathbb{N}$ (damit Summe endlich), etwa $x = n \in \mathbb{N}$

$$F(n,k) = \frac{(n+y+z+w+k)!}{(n-k)!(y-k)!(z+k)!(w+k)!k!}$$

Mit $i_0 = 1$: $\tilde{F}(n,k) = a_0(n)F(n,k) + a_1(n)F(n+1,k)$, $\tilde{a}(n,k) = (n+1-k)a_0(n) + (n+1+y+z+w+k)a_1(n)$.

$$\hat{F}(n,k) = \frac{\tilde{F}(n,k)}{(n+1-k)}$$

Rechnung ergibt: $a(n,k) = (n+y+z+w+k+1)(n+1-k)(y-k)$, $b(n,k) = (z+k+1)(w+k+1)(k+1)$, $\hat{c}(n,k) = 1$. Polynomiale Lsung $g(n,k)$ der kritischen Gleichung ist vom Grad kleiner gleich $d = deg(\tilde{a}) - deg(a+b)+1 = -1$ oder $d = 0$, nach vgl. der Koeffizienten von a von b wie in Satz 7. Also: $g(n,k) = g_0(n)$ mit Gleichungen

$$(n+1)a_0(n) + (n+1+y+z+w)a_1(n) = (n+1)(n+1+y+z+w)yg_0(n)$$

und

$$-a_0(n) + a_1(n) = ((n+1)y - (n+1+y)(n+1+y+z+w) - zw)g_0(n)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
a_0(n) &= (n+1+y+z)(n+1+y+w)(n+1+y+z+w)\\
a_1(n) &= -(n+1)(n+1+z)(n+1+w)\\
g_0(n) &= 2n+2+y+z+w
\end{aligned}$$

Beispiel 6: [GKP, p.236]

$$\begin{aligned}
\sum_k F(n,k) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}z^k\\
&= \frac{1}{(1-z)^n}\left(1+\frac{1-2z}{2-2z}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k}(z(1-z))^k\right)
\end{aligned}$$

Beispiel 6': [GKP, p. 237]

$$\sum_k F(n,k) = \sum_k \binom{n-k}{k} z^k$$

$i_0 = 0$; $i_0 = 1$: nicht Gosper-Summierbar
$i_0 = 2$: Gosper-summierbar für $a_0(n) = z$, $a_1(n) = 1$, $a_2(n) = -1$ und $g_0(n) = 1$. Einsetzen und summieren liefert die folgende Rekursion:

$$\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n-k+2}{k} z^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n-k+1}{k} z^k + z \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} z^k$$

also:

$$f(n+2) = f(n+1) + zf(n)$$

Beispiel 7: Rekursion von Apery [GKP, p. 238]. Apery verwendet im Beweis von $\zeta(3) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}$ eine Rekursion für

$$f(n) = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

Damals nach zwei Monaten von Zagier und Cohen bewiesen. Deren Technik war Ausgangspunkt fr Zeilberger.

$$F(n,k) = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

eigentlich hypergeometrischer Term.
$i_0 = 0$; $i_0 = 1$: nicht Gosper-summierbar.
$i_0 = 2$: $\tilde{F}(n,k) = a_0(n)F(n,k) + a_1(n)F(n+1,k)$ und weiters $\tilde{a}(n,k) = (n+1-k)^2(n+2-k)^2a_0(n) + (n+1+k)^2(n+2-k)^2a_1(n) + (n+1+k)^2(n+2+k)^2a_2(n)$ und $\hat{F}(n,k) = \frac{F(n,k)}{(n+1+k)^2(n+2-k)^2} = \frac{(n+k)!^2}{k!^4(n+2-k)!^2}$.
$a(n,k) = (n+1-k)^2(n+2-k)^2$, $b(n,k) = k^4$, $\hat{c}(n,k) = 1$ und a, b erfüllen die ggT-Bedingung. Rechnung ergibt für Gradschranke d von $g(n,k)$: $deg(a) = deg(b) = 4$, $deg(a-b) = 3$, $lk(a-b) = -2k^3$ also $d = 2$ und $g(n,k) = g_0(n) + g_1(n)k + g_2(n)k^2$. Man erhlt nun fünf homogene Gleichungen in den sechs Unbekannten $a_0, a_1, a_2, g_0, g_1, g_2$ etwas: bei k^0:

$$a_0 + a_1 + a_2 - g_0 - g_1 - g_2 = 0$$

bei k^4:

$$a_0 + a_1 + a_2 + g_1 + (6 + 6n + 2n^2)g_2 = 0$$

Es gibt also nicht triviale Lsung, etwas: $a_0 = (n+1)^3$, $a_1 = -(2n+3)(17n^2+51n+39)$, $a_2 = (n+2)^3$, $g_0 = -16(n+1)(n+2)(2n+3)$, $g_1 = -12(2n+3)$, $g_2 = 8(2n+3)$

Einsetzen ergibt die Gleichung:

$$(n+1)^3F(n,k) - (2n+3)(17n^2+51n+39)F(n+1,k) + (n+2)^2F(n+2,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

Damit:

$$G(n,k) = k^4 g(n,k)\hat{F}(n,k) = \frac{(2n+3)(8k^2 - 12k + 16(n+1)(n+2)(n+k)!^2}{(k-1)!^4(n+2-k)!^2}$$

$$A(n) = \sum_k F(n,k) = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

mit Rekursion

$$(n+1)^3A(n) + (n+2)^3A(n+2) = (2n+3)(17n^2+51n+39)A(n+1)$$

Diese stimmt mit der Rekursion von Apery berein.

Bemerkung: Algorithmus versagt i.A. für nicht eigentlich hypergeometrische Terme wie etwa: $\binom{n}{k}n^k$ oder $\frac{1}{nk+1}$.

E. Automatisches Beweisen von kombinatorischen Identitten

Literatur: [A=B, p. 121-140], [W Z , J.AMS $\underline{3}$ (1990), p. 147-158], [W Z, Bull. AMS (1990) $\underline{22}$, p. 77-83], [W Z, Bull. AMS (1992) $\underline{27}$, p. 148-153], [Paule: Short and easy Computer proofs of the Roger Ramanujan Identity, Electr. J. Comp. $\underline{1}$ (1994), R10].

Ziel: Beweise möglichst schnell eine kombinatorische Identität

$$\sum_k F(n,k) = H(n)$$

mit bekannten hypergeometrischen Termen $F(n,k)$ und $H(n)$. Wäre $H(n)$ noch nicht bekannt, dann ist Zeilberger Algorithmus notwendig. Division durch $H(n)$ liefert

$$\sum_k \tilde{F}(n,k) = const$$

mit $\tilde{F}(n,k) = \frac{F(n,k)}{H(n)}$ (auer für $H(n) \equiv 0$, dann aber bereits $\sum \ldots = const$). Schreibe wieder $F(n,k)$ für $\tilde{F}(n,k)$ (als Quotient h.g. Terme wieder h.g.). Setze $f(n) = \sum_k F(n,k)$ und beweise $f(n) \equiv const$. Ausreichend

$$f(n+1) - f(n) = 0$$

und Verifikation von $f(0) = const$.

Idee: Betrachte Differenzenoperatoren auf den Sden: Suche mit Gosper-Algorithmus (bzgl. Variablen k und Parameter n) einen h.g. Term G mit

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \quad (*)$$

Algorithmus verifiziert, ob G existiert; wenn ja, dann wird G berechnet. Beachte: (*) ist ein Spezialfall von:

$$\sum_{i=0}^{i_0} a_i(n) F(n+i,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

mit $i_0 = 1,\ a_0(n) = -1,\ a_1(n) = 1$.

Bemerkung: Im allgemeinen hat (*) keine h.g. Lsung $G(n,k)$! WZ: aber meistens! Kann man (*) erreichen, so folgt sofort durch Summation über k, sofern G kompakten Träger hat:

$$f(n+1) - f(n) = \sum_k (F(n+1,k) - F(n,k)) = 0$$

Definition: In der Situation von (*) heit (F,G) ein Wilf-Zeilberger Paar.

$$R(n,k) = \frac{G(n,k)}{F(n,k)}$$

heit das Zertifikat von (F,G), wobei R rationale Funktion (s. Gosper-Algorithmus). (** s. hinten).

Beispiel: $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. $F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$; z.z. $\sum_k F(n,k) = 1$. Computerhilfe zeigt, da $F(n+1,k) - F(n,k)$ bzgl. k Gosper summierbar ist. und $G(n,k) = R(n,k) \cdot F(n,k)$.

$$R(n,k) = -\frac{k^2(3n-3k+3)}{2(2n+1)(n-k+1)^2}$$

Man kann nun direkt verifizieren, da (*) erfüllt ist. Damit

$$f(n) = \sum_k F(n,k) = const$$

und

$$f(0) = F(0,0) = \binom{0}{0} = 1$$

.

(**): Beachte, da $F(n+1,k) - F(n,k) = \left(\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} - 1\right) \cdot F(n,k)$. Also rationales Vielfaches von $F(n,k)$.

Bemerkung: Diese Methode funktioniert nur, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$, $G(n,k) = 0$ wird für $|k|$ gro.
Bemerkung: Die Identität (*) lät sich mit Differenzenoperator schreiben:

$$\jmath_n F = \jmath_k G$$

Im kontinuierlichen Fall entspricht dies einer partiellen Differentialgleichung

$$\partial_x F(x,y) = \partial_y G(x,y)$$

Dann existiert ein $H(x,y)$ mit $F(x,y) = \partial_y H(x,y)$ und $G(x,y) = \partial_x H(x,y)$ (sofern gute Vorraussetzungen).

Weitere Beispiele: Die Gauss'sche Identität, Kummer, Saalschütz, Dixon Identität lassen sich alle mit WZ-Algorithmus beweisen!
[A=B, p. 126, 127]: Kummer: $F(1-c-2n, -2n|c|-1) = (-1)^n \frac{(2n)!(c-1)!}{n!(c+n-1)!}$. Damit ist: $\sum_k F(n,k) = 1$ mit

$$F(n,k) = \frac{(-1)^{n+k}(2n+c-1)!n!(n+c-1)!}{(2n+c-1-k)!(2n-k)!(c+k-1)!k!}$$

und Zertifikat:

$$R(n,k) = \frac{k(k+c-1)(2+4c+c^2-3k-2ck+k^2+10n+7cn-6kn+10n^2}{2(2n-k+1+c)(2n-k+c)(2n-k+2)2n-k+1)}$$

Bemerkung: Die Gleichung (*)

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

liefert durch Summation über n eine "neue" Identität, nmlich $\sum_n G(n,k+1) - G(n,k)) = \sum_n (F(n+1,k) - F8n,k)) = \lim_{n\to\infty}(F(n,k) - F(0,k))$ sofern der Limes existiert! Mit Rechnung folgt:

$$g(k) = \sum_n G(n,k) = \sum_{i<k} lim_{k\to\infty} F(n,i) - F(0,i)$$

die sogenannte "begleitende Identität".

Beispiel: $F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$; $\sum_k F(n,k) = 1$. $g(k) = \sum_{n\geq 0} G(n,k) = \sum_{i<k} lim_{k\to\infty} F(n,i) - F(0,i)$, wobei $G(n,k) = R(n,k) \cdot F(n,k) = -\frac{(3n-2k+3)n!}{2(2n+1)(k-1)!(n-k+1)!^2\binom{2n}{n}}$. Es gilt: $F(0,i) = \delta_{i0}$. Wir erhalten:

$$\sum_{k\geq 0} \left(\frac{(3n-2k+3)n!^2}{2(2n+1)(k-1)!^2(n-k-1)!^2 \frac{2n}{n}} \right) = 1 f.k \geq 1$$

Dies liefert die begleitende Identität:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(3n-2k+1)}{2n+1} \cdot \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = 2; \quad k \in \mathbb{N}$$

Weitere Beispiele : [A=B, p. 129-130].

Bemerkung: Durch folgende Umformung kann man aus

$$\sum_k F(n,k) = 1$$

eine weitere Identität gewinnen, die sogenannte duale Identität: Sei $F(n,k)$ von der Gestalt:

$$F(n,k) = x^n y^k R(n,k) \frac{\prod_i P_i(n,k)!}{\prod_j Q_j(n,k)!}$$

wobei R rationale Funktion und $P_i, Q_j \in \mathbb{Z}[x]$ mit $grad \leq 1$. Sei $P(n,k)! = (an+bk+c)!$ einer der Faktoren im Zähler oder Nenner. Ersetze $(an+bk+c)!$ durch

$$\frac{(-1)^{an+bk}}{(-1-an-bk-c)!}$$

in allen oder einigen Faktoren. Beachte $(an+bk+c)! = -\frac{\pi}{sin((an+bk+c)!\cdot\pi)\cdot(-1-an-bk-c)!}$, wegen $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$, also wird $F(n,k)$ mit einer periodischen Funktion der Periode 1 multipliziert. Insbesondere bleibt

$$F(n+1,k) - F(n,k)$$

erhalten (bis auf das VZ). Weiters gilt: Ist $(F(n,k), G(n,k))$ ein WZ-Paar, so auch (G(-k-1,n), F(-k,-n-1)). Hinzufügen von diesem Ausdruck liefert eine neue Identität, die sogenannte duale Identität.

Beispiel: $F(n,k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$ Hier ist:

$$G(n,k) = \frac{-3+2k-3n)}{2(2n+1)(n-k+1)^2} \cdot \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

. 1. Substitution liefert

$$F(n,k) = \frac{(-2n-1)!(-k-1)!^2}{(-n-1)!^4(n-k)!^2}$$

2.Substitution liefert:

$$\tilde{F}(n,k) = \frac{1}{2}(-3k+2n)\binom{n}{k}^2\binom{2n}{n}$$

und

$$\tilde{G}(n,k) = \frac{1}{2}k\binom{n}{k-1}^2\binom{2n}{n}$$

als WZ-Paar. Da $\tilde{G}$ bzgl. k kompakten Träger hat, erhalten wir nach Summation über k:

$$\sum_k (3k-2n)\binom{n}{k}^2\binom{2k}{k} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

Weitere Beispiele:

(a) $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ dual zu $\sum_k (-1)^{n+k}\binom{n}{k}2^n = 1$

(b) Saalschützidentität ist zu sich selbst dual.

(c) Vandermonde $\sum_k \binom{x}{k}\binom{n}{k} = \binom{n+x}{n}$ ist dual zu $\sum_k (-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k+y}{k} = \binom{y}{n}$

Literatur: [A=B, p. 135-137], Ira Gessel: Finding Identities... in Theoretical Comp. Science (1995).

Exkurs: q-hypergeometrische Reihen

Bemerkung: Im diskreten Fall betrachten wir stets den Shiftoperator $S_x : K[x] \longrightarrow K[x]; f(x) \longrightarrow f(x+1)$. Analog:

$$\tilde{S}_x^t f(x) = f(x+t), \quad t \in K$$

Beachte: $\phi : K[x] \longrightarrow K[x], f(x) \longmapsto f(x+1)$ ist ein K-Algebrenisomorphismus (Alg. Hom., da Substitution):

$$\phi^{-1}\left(f(x)\right) = f(x-1)$$

Andere K-Algebrenhomomorphismen: $f(x) \longmapsto f(q \cdot x), \quad q \in K \setminus \{0\}$, oder allgemeiner: $f(x) \longmapsto f(ax+b), \quad a \in K*, \quad b \in K$ (Bem.: Dies sind dann auch alle mit polynomialer Inversen).

Definition: $(a,q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i) = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})$ und $(q,q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-q^i) = (1-q)\dots(1-q^n)$. Eine a-hypergeometrische Reihe:

$$\Phi_q(a_1,\dots,a_n|b_1,\dots,b_m|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1,q)_k \dots (a_n,q)_k}{(b_1,q)_k \dots (b_m,q)_k (q,q)_k} x^k$$

Erinnerung: $F(a_1,\dots,a_n|b_1,\dots,b_m|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{k}}\dots a_n^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}}\dots b_m^{\overline{k}} 1^{\overline{k}}} x^k$ Zusammenhang: Schreibt man $a_i = q^{\alpha_i}$, $b_j = q^{\beta_j}$ und lät man dann in $\Phi(a|b|x)$ q gegen 1 gehen, so geht $\Phi(a,b,x)$ gegen $F(\alpha|\beta|x)$ - sogenannte "Konfluenz".

Beispiele:

(1) $\Phi(a|-|x)$ ist Lösung der q-Differentialgleichung

$$(1-ax)y(ax) - (1-x)y(x) = 0$$

(2) Gau'sche q-hypergeometrische Reihe (s.a. Heine, Ramanujan, ...)

$$\Phi_y(a,b|c|x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a,q^{-1})_k (b,q^{-1})_k}{(c,q^{-1})_k (q^{-1},q^{-1})_k} x^k$$

mit q-Differenzenleichung:

$$y(q^2x) - \lambda y(qx) + \mu y(x) = 0$$

mit $\lambda = \frac{(a+b)x-(1+\frac{c}{q})}{abx-\frac{c}{q}}$, $\mu = \frac{x-1}{abx-\frac{c}{q}}$. Ersetze a,b,c durch $q^\alpha, q^\beta, q^\gamma$ und erhalte für $q \to 1$ die klass. Gau'sche h.g. Reihe $F(\alpha,\beta|\gamma|x)$ mit Dgl.:

$$(x\partial)^2 - \tilde{\lambda}(x\partial)y(x) + \tilde{\mu}y(x) = 0$$

mit $\tilde{\lambda} = \frac{(\alpha+\beta)x+(1-\gamma)}{1-x}$ und $\tilde{\mu} = \frac{\alpha\beta x}{1-x}$.

Vermutung Grothendieck: Sei $P \in \mathbb{Q}[x,\partial]$ Differentialoperator in einer Variablen. Betrachte die Dgl. $Py = 0$ mit PR Lösung $y(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Behauptung: $Py = 0$ besitzt ein vollständiges System von algebraischen Lösungen $y(x)$ (d.h. PR mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, die algebraisch über $\mathbb{Q}[x]$ sind, z.B. $\sqrt{1+x}$ erfüllt die definierende Gleichung: $y^2-(1+x) = 0 \Leftrightarrow Py \equiv 0 \mod p$ besitzt für fast alle $p \in \mathbb{N}$ prim ein vollst. System von rationalen Lösungen $(y(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(x))$.

Bemerkungen: (1) Formuliere die Vermutung für Differenzengleichung. (2) Vergleiche den Differentiellen Divisionsalgorithmus mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ bzw. *mod p*.

Satz(di Vizio, Inventionens 150 (2002), p. 517-578): Sei $P \in \mathbb{Q}[x, \jmath_q]$ (mit $\jmath_q$ der q-Differenzenoperator, d.h.: $\jmath_q f(x) = f(q \cdot x)$), dann gilt: $Py = 0$ besitzt vollständiges System von Lösungen in $\mathbb{Q}[x]$ (rat. Fkt.); für alle $p \in \mathbb{N}$ prim besitzt $Py = 0 \mod p^{l_p}$ ein vollst. System von Lösungen in $\mathbb{Z}[x, \frac{1}{r(q^i x)}; i \geq 1, r(x) \in \mathbb{Z}[x]] \otimes \mathbb{Z}/p^{l_p}\mathbb{Z}$ für ein eind. aus q und p spezifisches l_p. [Gazethe des Mathematicens, 2003 Avril, di Vizio - Saulay, Zhang, Romis]

Rückblick und Ausblick

Wichtigste Aufgabe: Abzählen von Möglichkeiten, Konfigurationen, Objekten, ...

Bijektionen zwischen endlichen Mengen von Konfigurationen. Beispiele: Partitionen mit geraden Summanden, mit ...

Aufstellen von Rekursionen, Lösen von Rekursionen (Differenzengleichungen) mittels: Erzeugende Funktionen, unbestimmter Ansatz, Divisionsalgorithmus.

Spezielle Zahlen, Polynome charakterisiert durch spezielle Rekursionen, umbraler Kalkül

Summationstechniken und Automatisches Beweisen von kombinatorischen Identitäten.

Interessante Fragestellungen finden sich in Comtet.

Programm für weitere Vorlesung:

- Derangements = Permutationen ohen Fixpunkte (abzählen, ...)
- Graphentheorie (Vierfarbensatz)
- Theorie der endlichen Gruppen, Teilbarkeit, etwa: Sei $G(n)$ die Anzahl der Isomorphieklassen der endlichen Gruppen der Ordnung n. Zeige: $G(n) \leq n^{n \log_2 n}$
- Polytope im $\mathbb{R}^n$; Ehrhart Polytope
- Wahrscheinlichkeitstheorie
- Endliche bzw. Abzählende Geometrie: Teile den $\mathbb{R}^2$ durch k Geraden (oder Kreise) (keine drei durch einen Punkt); wieviele Gebiete ergeben sich (bei Geraden sind es $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)$).
- LLL-Algorithmus (Lenstra, Leinka, Lovacs): Berechnen minimales EZS eines Gitters im $\mathbb{Z}^n$
- Ganzzahlige Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- Catalan Zahlen $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$
- Kettenbrüche

Vereinfache: $2^{26} 3^{14} 5^7 7^4 11^2 13^2 17 \cdot 6301$